

Вариант 6 и 8

Группу школьников нужно перевезти из летнего лагеря одним из двух способов: либо двумя автобусами типа А за несколько рейсов, либо тремя автобусами типа В за несколько рейсов, причём в этом случае число рейсов каждого автобуса типа В будет на один меньше, чем рейсов каждого автобуса типа А. В каждом из случаев автобусы заполняются полностью. Какое максимальное количество школьников можно перевезти при указанных условиях, если в автобус типа В входит на 7 человек меньше, чем в автобус типа А?

a – вместимость автобуса А, n – их количество
 b – вместимость автобуса В, m – их количество
 N – число школьников

$$\text{По условию } \begin{cases} 2an = N \\ 3bm = N \\ b = a - 7 \\ m = n - 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3(a - 7)(n - 1) = N \\ 2an = N \end{cases} \rightarrow 3\left(\frac{N}{2n} - 7\right)(n - 1) = N$$

$$3Nn - 3N - 42n^2 + 42n = 2nN$$

$$Nn - 3N = 42n^2 - 42n$$

$$N = \frac{42n^2 - 42n}{n - 3} = 42n + \frac{84(n - 3) + 252}{n - 3} = 42n + 84 + \frac{252}{n - 3}$$

$$\text{При этом } b = \frac{N}{3(n - 1)} = \frac{42n(n - 1)}{3(n - 1)(n - 3)} = \frac{14n - 42 + 42}{n - 3} = 14 + \frac{42}{n - 3}$$

Получаем, что $n - 3$ должно быть делителем числа 42.

$$n - 3 = 1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42$$

Перебором находим, что наибольшее N будет при $n - 3 = 42$; $n = 45$; $N = 1980$

Вариант 5 и 7

Найдите несократимую дробь $\frac{p}{q}$ такую, что

$$\frac{p}{q} = \frac{1234567 \overbrace{888 \dots 8}^{2000} 7654321}{12345678 \underbrace{999 \dots 9}_{1999} 87654321}$$

Заметим закономерность

$$11^2 = 121; \quad 11 \cdot 111 = 1221; \quad 11 \cdot 1111 = 12221; \dots$$

$$111^2 = 12321; \quad 111 \cdot 1111 = 123321; \dots$$

Тогда

$$11111111^2 = 123456787654321$$

$$11111111 \cdot 11111111 = 1234567887654321$$

.....

$11111111 \cdot 11111111$ (и еще 1999 единичек) = (12345678888...2000 штук восьмерок...7654321)
 всего единичек во втором сомножителе 2007

Аналогично

$$111\ 111\ 111^2 = 12345678987654321$$

$$111\ 111\ 111 * 111\ 111\ 111\ 1 = 123456789987654321$$

$$111\ 111\ 111 * 111\ 111\ 111\ (\text{и еще } 1998 \text{ единичек}) = (123456789999 \dots 1999 \text{ штук девяток} \dots 87654321)$$

всего единичек во втором сомножителе 2007

Эти страшные вторые сомножители сокращаются и получаем $\frac{11111111}{11111111}$. Это ответ.