C5 Диагностическая работа МИОО 19.11.09

Найдите все значения *a*, при каждом из которых система

$$\begin{cases} \dfrac{x-ax-a}{x-2+2a} \ge 0 \\ x-8 > ax \end{cases}$$

не имеет решений.

Имеем систему $\begin{cases} \dfrac{x(a-1)+a}{x+2(a-1)} \le 0 \\ x(a-1) < -8 \end{cases}$

Сначала рассмотрим случай $a = 1$ тогда второе неравенство не имеет решений, значит и вся система не имеет.

Теперь рассмотрим случай $a > 1$.

Имеем три точки $x_1 = -\dfrac{a}{a-1} < 0; \quad x_2 = -2(a-1) < 0; \quad x_3 = -\dfrac{8}{a-1} < 0$

Решением первого неравенства будет промежуток $[x_1; x_2)$ или $(x_2; x_1]$.

Решением второго неравенства будет промежуток $(-\infty; x_3]$

Система не будет иметь решений если $\begin{cases} x_3 < x_1 \\ x_3 \le x_2 \end{cases}$

$$\begin{cases} -\dfrac{8}{a-1} < -\dfrac{a}{a-1} \\ -\dfrac{8}{a-1} \le -2(a-1) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a < 8 \\ (a-1)^2 \le 4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a < 8 \\ -1 \le a \le 3 \end{cases}$$

С учетом условия $a > 1$ получаем $a \in (1;3]$

Теперь случай $a < 1$

$$\begin{cases} \dfrac{x(a-1)+a}{x+2(a-1)} \le 0 \\ x(a-1) < -8 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dfrac{x+\dfrac{a}{a-1}}{x+2(a-1)} \ge 0 \\ x > -\dfrac{8}{a-1} \end{cases}$$

Решением первого неравенства будут два неограниченных промежутка, поэтому система всегда будет иметь решения.

Окончательно $a \in [1;3]$