

Найдите все значения a , при каждом из которых множеством решений неравенства $\sqrt{5-x} + |x+a| \leq 3$ является отрезок.

Задача решается элементарно графически.

$$\sqrt{5-x} - 3 \leq -|x+a|; \quad f(x) = \sqrt{5-x} - 3; \quad g(x) = -|x+a|$$

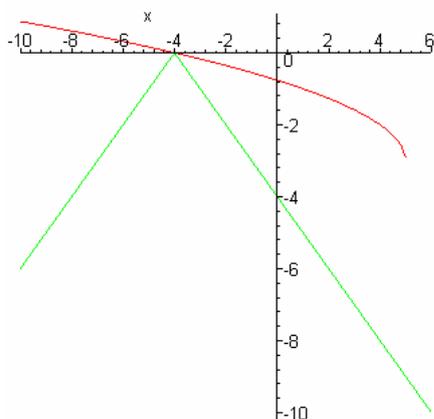


Рис 1

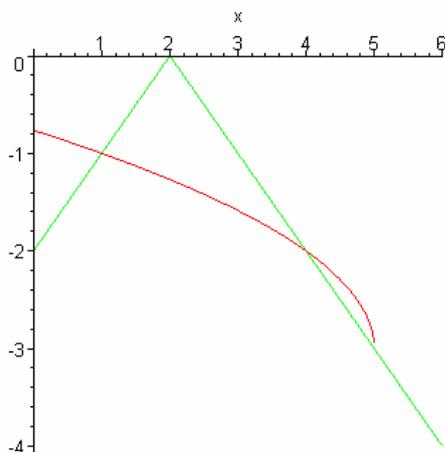


Рис 2

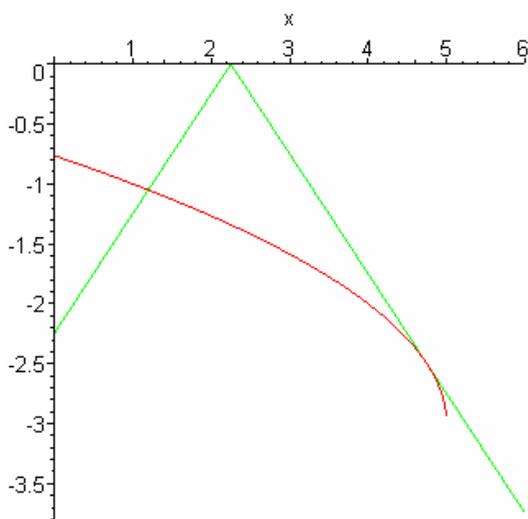


Рис. 3

Графики построить очень легко. Видно, что решением неравенства будет отрезок, если график функции $g(x)$ смещается правее положения, показанного на рисунке. Т.е. при $a < 4$

Найдем точку, в которой правая часть графика функции $g(x)$ пройдет через точку $(5; -3)$

$$-5 - a = -3; \quad \rightarrow \quad a = -2$$

Этот случай показан на рис.2. Тогда кроме отрезка решением неравенства будет еще и точка $x=5$, что не удовлетворяет условию задачи.

Однако, возможен случай касания (рис.3).

$$f'(x) = \frac{-1}{2\sqrt{5-x}} = -1; \quad \rightarrow \quad 5-x = \frac{1}{4}; \quad x = \frac{19}{4};$$

$$f\left(\frac{19}{4}\right) = -\frac{19}{4} - a; \quad \rightarrow \quad \frac{1}{2} - 3 = -\frac{19}{4} - a;$$

$$a = 3 - \frac{1}{2} - \frac{19}{4} = \frac{12-2-19}{4} = -\frac{9}{4};$$

При дальнейшем смещении вправо решением неравенства будет отрезок от точки пересечения с левой ветвью до границы области определения $x=5$. Эти точки совпадут при $5+a = -3$, $\rightarrow a = -8$

Окончательно получаем: $a \in \left(-8; -\frac{9}{4}\right] \cup (-2; 4)$