С3 Диагностическая работа МИОО 19.11.09

Решить неравенство:

$$\sqrt{7-x} < \frac{\sqrt{x^3-6x^2+14x-7}}{\sqrt{x-1}}$$

Сначала ограничения:

$$\begin{cases} 7-x \ge 0 \\ x-1>0 \\ x^3-6x^2+14x-7 \ge 0 \end{cases} \to \begin{cases} 1<x\le 7 \\ x^3-6x^2+14x-7 \ge 0 \end{cases}$$

Рассмотрим функцию $f(x)=x^3-6x^2+14x-7$.

$f'(x)=3x^2-12x+14>0;$ при любом *x*, т.е. функция монотонно возрастает.

$f(1)=2$

$f(7)=140$ - значит $f(x)>0$ на промежутке $x \in (1;7]$

Теперь само неравенство:

$$(7-x)(x-1)<x^3-6x^2+14x-7$$

$$7x-7-x^2+x-x^3+6x^2-14x+7<0$$

$$-x^3+5x^2-6x<0$$

$$x(x^2-5x+6)>0$$

$$x \in (0;2) \cup (3;\infty)$$

Примечание: В данном конкретном случае решение можно существенно упростить, т.к. при решении неравенства $(7-x)(x-1)<x^3-6x^2+14x-7$ из условия $7-x \ge 0$ и $x-1>0$ следует неотрицательность $x^3-6x^2+14x-7$. Таким образом исследование знакопостоянства можно не проводить.

С учетом ограничений $x \in (1;2) \cup (3;7]$

Ответ: $x \in (1;2) \cup (3;7]$

http://alexlarin.narod.ru