

C5 Для чисел a_1, a_2, \dots, a_{42} верны равенства $a_{n+1} = f(a_n)$, $n = 1, 2, \dots, 41$.

Найдите $a_{13} - a_{10}$, если известно, что $a_{42} = 0$, а

$$f(x) = \begin{cases} 7^x + 4^{-\frac{6}{x+1}} - 8, & \text{если } x \leq -4 \\ \frac{52}{x+4} - 4, & \text{если } x > -4 \end{cases}.$$

Ответ:

9.

//Решение:

1) Пусть $g(x) = \frac{52}{x+4} - 4$, $x > -4$. Тогда $g(x) > -4$ и

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow x + 4 = 13 \Leftrightarrow x = 9.$$

Пусть $h(x) = 7^x + 4^{-\frac{6}{x+1}} - 8$, $x \leq -4$. Тогда $7^x > 0$, $-\frac{6}{x+1} > 0$, $4^{-\frac{6}{x+1}} > 1$ и

$h(x) > -7$. При возрастании x на промежутке $(-\infty; -4]$ возрастают и 7^x , и

$$-\frac{6}{x+1}, \text{ и } 4^{-\frac{6}{x+1}}.$$

Поэтому функция h возрастает на промежутке $(-\infty; -4]$. Так как

$$h(-4) = 7^{-4} + 4^2 - 8 = 7^{-4} + 8 > 0, \quad h(-7) = 7^{-7} + 4 - 8 = 7^{-7} - 4 < 0 \text{ и}$$

функция h непрерывна¹, то эта функция имеет единственный нуль x_0 и

$$x_0 \in (-7; -4).$$

$$2) f(a_{41}) = a_{42} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} g(a_{41}) = 0 \\ h(a_{41}) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{41} = 9 \\ a_{41} = x_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(a_{40}) = 9 \\ f(a_{40}) = x_0 \end{cases}. \text{ Так как все}$$

значения функции f больше -7 и $a_{40} = f(a_{39})$, то $a_{40} > -7$.

Если $a_{40} > -4$, то $f(a_{40}) = g(a_{40}) > -4 > x_0$, т.е. $f(a_{40}) \neq x_0$.

Если $a_{40} \leq -4$, то $f(a_{40}) = h(a_{40}) > h(-7) = 7^{-7} - 4 > -4 > x_0$,

т.е. $f(a_{40}) \neq x_0$. Поэтому случай $a_{41} = x_0$ невозможен и, значит, $a_{41} = 9$.

$$3) \text{ Так как } a_{41} = 9, \text{ то } f(a_{40}) = 9 \Leftrightarrow \begin{cases} g(a_{40}) = 9 \\ h(a_{40}) = 9 \end{cases}. \text{ Случай } h(a_{40}) = 9$$

невозможен, так как $h(a_{40}) \leq h(-4) = 7^{-4} + 8 < 9$.

$$\text{Значит, } g(a_{40}) = 9 \Leftrightarrow \frac{52}{a_{40} + 4} - 4 = 9 \Leftrightarrow a_{40} = 0.$$

Далее, аналогично получаем, что

$$a_{39} = 9, a_{38} = 0, a_{37} = 9, a_{36} = 0, \dots, a_{13} = 9, a_{12} = 0, a_{11} = 9, a_{10} = 0.$$

Значит, $a_{13} - a_{10} = 9$.

Ответ: 9.

¹ Допустимо отсутствие явной ссылки на непрерывность функции.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания С5
4	<p>Приведена верная последовательность всех шагов решения:</p> <p>1) исследование функции f, нахождение ее нулей;</p> <p>2) нахождение a_{41};</p> <p>3) установление закономерности изменения (периодичности) членов последовательности a_3, a_4, \dots, a_{42}, вычисление $a_{13} - a_{10}$.</p> <p>Обоснованы все моменты решения:</p> <p>а) единственность нуля функции h обоснована ссылкой на возрастание h и указанием c и d, для которых $h(c) > 0, h(d) < 0$;</p> <p>б) в шаге 2) явно использовано, что все значения функции f больше -7;</p> <p>в) в шаге 2) есть ссылка на неравенство $h(-7) > -4$;</p> <p>г) в шаге 3) есть ссылка на неравенство $h(-4) < 9$.</p> <p>Все преобразования и вычисления верны. Получен верный ответ.</p>
3	<p>Приведена верная последовательность всех шагов решения. Доказано, что $a_{41} = 9$. Обоснован ключевой момент в) и приведено неравенство $a_{40} > -7$ (допустимо, что без обоснования).</p> <p>Допустимо, что при нахождении a_{40} не разобран случай $h(a_{40}) = 9$.</p> <p>Допустима 1 описка и/или негрубая вычислительная ошибка в шаге 3), в результате чего может быть получен неверный ответ.</p>
2	<p>Приведена в целом верная, но, возможно, неполная последовательность шагов решения. Выполнен шаг 1) и, частично, шаг 2): рассмотрен случай $a_{40} > -4$ и доказано, что $g(a_{40}) \neq x_0$.</p> <p>Допустимо, что дальнейшее выполнение не завершено, а ключевые моменты не обоснованы.</p>

1	<p>Общая идея, ход решения верны. Выполнен шаг 1): приведена оценка снизу множества значений функции f, указано, что эта функция имеет единственный нуль $x = 9$ при $x > -4$ и единственный нуль при $x \leq -4$.</p> <p>Или же проведены верные вычисления a_{41}, a_{40}, но с использованием $f(x)$ только при $x > -4$, допустимо, что шаги 1) и 2) отсутствуют.</p> <p>Допустимо, что дальнейшее выполнение не завершено, а ключевые моменты не обоснованы.</p>
0	<p>Все случаи решения, которые не соответствуют указанным выше критериям выставления оценок в 1, 2, 3, 4 балла.</p>