

- С4** Дан конус с вершиной M , радиус основания которого равен $2\sqrt{21}$. На окружности его основания выбраны точки A, B, C так, что углы $\angle BMA, \angle CMB, \angle AMC$ равны α каждый, причем $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{3}{5}}$. Точка F выбрана на дуге BC окружности основания конуса, не содержащей точки A , так, что объем пирамиды $MABFC$ наибольший. Найдите расстояние от точки A до плоскости MBF .

Ответ:

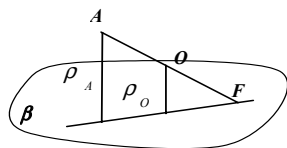
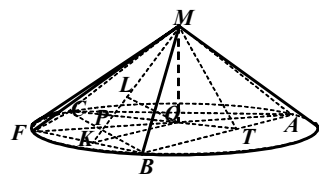
12.

//Решение:

1) $MA = MB = MC$, как образующие конуса и $\angle AMB = \angle AMC = \angle CMB = \alpha$, следовательно, треугольники AMB, AMC, CMB равны. Поэтому $AB = AC = CB$, значит, треугольник ABC – равносторонний и вписан в окружность радиуса $r = 2\sqrt{21}$. Следовательно, $AB = AC = CB = r\sqrt{3} = 6\sqrt{7}$.

2) Объем V пирамиды $MABFC$ вычисляется по формуле $V = \frac{MO}{3}(S_{ABC} + S_{BCF})$, где S_{ABC}, S_{BCF} – площади треугольников ABC и BCF , MO – высота конуса и пирамиды $MABFC$. Поскольку величины MO, BC и S_{ABC} в условии задачи постоянны, то $V \leq \frac{MO}{3}(S_{ABC} + \frac{BC}{2} \cdot h_F)$, где h_F – наибольшая величина расстояния от точки дуги BC , не содержащей точку A , до стороны BC треугольника ABC . Расстояние от точки F дуги окружности до стягивающей ее хорды наибольшее, если F – середина этой дуги. Итак, основанием пирамиды $MABFC$, удовлетворяющей условиям задачи, является четырехугольник, в котором вершины A, B, C делят окружность основания конуса на три равные части и вершина F – середина дуги BC .

3) Пусть ρ_A и ρ_O – расстояния от точек A и O до плоскости $\beta = (MBF)$ соответственно. Тогда $\rho_A : \rho_O = AF : OA = 2 : 1$, следовательно, $\rho_A = 2\rho_O$.



4) FA – диаметр основания конуса. Следовательно, $\angle ABF = 90^\circ$. Пусть K – середина FB . Тогда OK – средняя линия треугольника ABF и поэтому $FB \perp OK$, $OK = 0,5AB$. Прямая FB перпендикулярна MK и MO , следовательно, $MBF \perp MOK$. Пусть OL – высота треугольника MOK . По свойству перпендикулярных плоскостей $OL \perp MBF$. Следовательно, $OL = \rho_O$. Пусть CT – высота $\triangle ABC$. Так как $AB = 6\sqrt{7}$, то $OK = 3\sqrt{7}$,

$$MT = \frac{AB}{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} = \sqrt{105} \quad \text{и} \quad OM = \sqrt{MT^2 - OT^2} = 2\sqrt{21}. \quad \text{Тогда}$$

$$\rho_O = \frac{OK \cdot OM}{\sqrt{OK^2 + OM^2}} = 6. \quad \text{Следовательно, искомое расстояние } \rho_A = 12.$$

Ответ: 12.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания С4
4	<p>Приведена верная последовательность шагов решения:</p> <p>1) установлено, что треугольник ABC – равносторонний;</p> <p>2) установлено, что пирамида $MABFC$ удовлетворяет условию задачи, только если вершина F – середина дуги BC;</p> <p>3) найдено соотношение между расстояниями от точки A и от точки O до плоскости MBF;</p> <p>4) вычислены расстояние от точки O до плоскости MBF и искомое расстояние от точки A до плоскости MBF.</p> <p>Обоснованы ключевые моменты решения: а) расположение вершин основания $ABFC$ пирамиды $MABFC$, имеющей наибольший объем; б) высота OL треугольника MOK – расстояние от точки O до плоскости MBF.</p> <p>Все преобразования и вычисления выполнены верно. Получен верный ответ.</p>
3	<p>Приведены все шаги решения 1) – 4).</p> <p>Приведены утверждения, составляющие ключевые моменты а) и б) решения¹. Допустимы отсутствие обоснований ключевых моментов решения или неточности в обоснованиях², но не грубые ошибки.</p> <p>Допустимы одна описка и/или негрубая ошибка в вычислениях, не влияющие на правильность хода решения. В результате этой описки и/или ошибки возможен неверный ответ.</p>
2	<p>Приведены шаги решения 1), 2) и найдено расстояние от точки O до плоскости MBF или, может быть, от какой-либо другой точки, например от точки C.</p> <p>Допустимо отсутствие утверждений, составляющих ключевые моменты а) и б) решения. Приведенные в решении обоснования не содержат грубых ошибок.</p> <p>Допустимы описки и/или негрубые ошибки в вычислениях, не влияющие на правильность хода решения. В результате этого возможен неверный ответ.</p>

¹ Подробнее об утверждениях, составляющих ключевые моменты решения задания С4, см. во введении к «Рекомендациям по оценке выполнения заданий с развернутым ответом (С1–С5)».

² Неточностью в обоснованиях является замена свойства на определение или на признак, или наоборот, а также неверные названия теорем или формул.

1	<p>Ход решения правильный, но решение не завершено: имеются шаги 1) и 2) решения, которые описаны словесно или ясно отражены и видны на чертеже (в соответствующих треугольниках обозначены равные углы и равные стороны). Вычислена длина стороны основания пирамиды.</p> <p>Приведенные в решении обоснования и вычисления не содержат грубых ошибок.</p>
0	<p>Все случаи решения, которые не соответствуют вышеуказанным критериям выставления оценок 1 – 4 баллов.</p>