С3 Найдите все значения a, при каждом из которых неравенство

$$\frac{\left(\sqrt{5}\,x^8+3x^{-8}-5\right)-a}{a-\left(2\cos\sqrt{x-1}-3\right)}\le 0 \quad \text{не имеет решений.}$$

<u>Ответ</u>:
$-1\le a<2\sqrt[4]{45}-5$.

//Решение:

1. Преобразуем неравенство к виду $\dfrac{a-f\left(x^8\right)}{a-g(x)}\ge 0$,

где $g(x)=2\cos\sqrt{x-1}-3,\quad x\ge 1,\quad f(t)=\sqrt{5}\,t+\dfrac{3}{t}-5,\quad t=x^8\ge 1.$

2. Исследуем функцию f: ее производная

$f'(t)=\sqrt{5}-\dfrac{3}{t^2}=\dfrac{\sqrt{5}\left(t-t_0\right)\left(t+t_0\right)}{t^2}$ равна нулю в точке $t_0=\sqrt{\dfrac{3}{\sqrt{5}}}>1$,

отрицательна при $1<t<t_0$ и положительна при $t>t_0$, поэтому

$$f_{наим}=f\left(t_0\right)=\sqrt{5}\cdot\sqrt{\frac{3}{\sqrt{5}}}+3\cdot\sqrt{\frac{\sqrt{5}}{3}}-5=2\sqrt[4]{45}-5.$$

3. Наибольшее значение функции g достигается, например, в точке $x_0=1$ и равно $g_{наиб}=2\cdot 1-3=-1$.

4. При любом значении $x\ge 1$ справедлива оценка $g(x)<f(x^8)$, так как
$g(x)\le -1=2\cdot 2-5<2\sqrt[4]{45}-5\le f(x^8)$.

Поэтому при $x\ge 1$ исходное неравенство равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l} a<g(x) \\ a\ge f(x^8) \end{array}\right.$$

(при $x<1$ оно не выполняется).

5. Исходное неравенство не выполняется ни при одном значении x тогда и только тогда, когда $g_{наиб}\le a<f_{наим}\Leftrightarrow -1\le a<2\sqrt[4]{45}-5$.

Ответ: $-1\le a<2\sqrt[4]{45}-5$.

Замечание. Исследование функции f на экстремум в пункте 2 решения можно провести с помощью неравенства для средних:

$$f\left(x^8\right)\ge 2\sqrt{\left(\sqrt{5}\,x^8\right)\cdot\left(3x^{-8}\right)}-5=2\sqrt[4]{45}-5=f\left(x_0^8\right),$$

где $\sqrt{5}\,x_0^8=3x_0^{-8}\Leftrightarrow x_0=\sqrt[16]{\dfrac{3}{\sqrt{5}}}$.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания С3
4	Получен правильный ответ. Приведено полное и верное решение, отвечающее следующим требованиям: 1) показано, что все значения параметра, включенные в ответ, обладают описанным в задаче свойством; 2) показано, что остальные значения параметра не обладают описанным в задаче свойством; 3) при этом а) получены необходимые оценки для функций; б) проверена достижимость оценки функции f на области определения функции g.
3	Получен ответ, представляющий собой промежуток для значений параметра с верными концами, но, возможно, с неточными неравенствами, т.е. строгими (нестрогими) вместо нестрогих (строгих). Приведено решение, отвечающее требованиям 1), 2) и 3а).
2	Получен ответ, представляющий собой промежуток для значений параметра, который: - либо содержится в верном промежутке (возможно, с неточными неравенствами), при этом приведено решение, отвечающее требованию 1); - либо содержит верный промежуток (возможно, с неточными неравенствами), при этом приведено решение, отвечающее требованию 2).
1	Ответ, возможно, не получен или неправильный. Приведено решение, отвечающее хотя бы одному из требований 1), 2) или 3а).
0	Все случаи решения, которые не соответствуют указанным выше критериям выставления оценок в 1 – 4 балла.