

# Тренировочная работа ЕГЭ по математике Профильный уровень, вариант 1, Салимова А.Ф.

11 класс, Лицей НИУ ВШЭ

22 апреля 2024 года

## Справочные материалы

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

## Часть 1

**1** В треугольнике  $ABC$  проведена биссектриса  $AM$ . Известно, что  $\angle B = 70^\circ$ ,  $\angle C = 35^\circ$ . На стороне  $AC$  выбрана точка  $P$  так, что  $AP = AB$ . Найдите  $\angle PBM$ .

Ответ дайте в градусах.

Ответ: \_\_\_\_\_

Ответ: 17,5.

**2** Треугольник задан координатами вершин:  $A(0, -4)$ ,  $B(6, 8)$ ,  $C(6, 2)$ . Найдите длину медианы  $CM$ .

Ответ: \_\_\_\_\_

Ответ: 3.

**3** В основании наклонной призмы лежит правильный шестиугольник, большая диагональ которого равна 8. Боковые ребра призмы равны  $2\sqrt{3}$  и наклонены к плоскости основания под углом  $30^\circ$ . Найдите объем призмы.

Ответ: \_\_\_\_\_

Ответ: 72.

**4** Игральный кубик бросают дважды. Найдите вероятность того, что в сумме выпадет более 8 очков. Ответ округлите до сотых.

Ответ: \_\_\_\_\_

Ответ: 0,28.

5] В праздничный день 14 февраля Маше передали коробку с валентинками: 7 открыток от Сережи и 3 открытки от Паши. Маша по очереди наугад достает открытки и читает их. Какова вероятность того, что в первый раз открытку от Паши она достанет четвертой по счету?

Ответ: \_\_\_\_\_

Ответ: 0,125.

6] Решите уравнение  $2 \log_{x+2} (x - 1) = \log_{x+2} (7 + 2x - x^2)$ . Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите меньший из корней.

Ответ: \_\_\_\_\_

Ответ: 3.

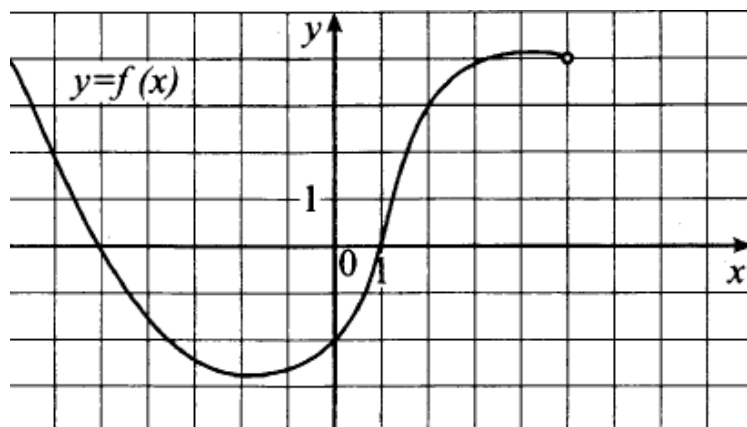
7] Найдите значение выражения при всех допустимых значениях  $\alpha$ :

$$\operatorname{ctg}(\pi + \alpha) \cdot \left( \cos\left(\frac{7\pi}{2} - \alpha\right) + 3 \sin(3\pi - \alpha) \right) + \frac{\sin(2\pi - 2\alpha)}{\sin(2\pi + \alpha)} + 3 \sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right).$$

Ответ: \_\_\_\_\_

Ответ: -1,5.

8] На рисунке изображен график функции  $y = f(x)$ . Касательная, проведенная в точке с абсциссой  $x = 2$ , проходит через начало координат. Чему равно значение  $f'(2)$ ?



Ответ: \_\_\_\_\_

Ответ: 1,5.

9] Давление газа  $p$  (в паскалях) и объем газа  $V$  (в  $\text{м}^3$ ) при адиабатическом процессе для идеального газа связаны соотношением  $p \cdot V^k = 8,1 \cdot 10^5$  при  $k = \frac{4}{3}$ . Какой объем в кубических метрах будет занимать газ при давлении  $6,25 \cdot 10^6$  Па?

Ответ: \_\_\_\_\_

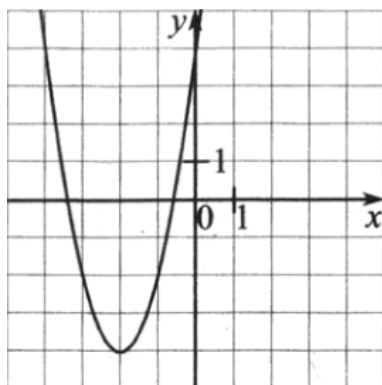
Ответ: 0,216.

**10** Поселок  $A$  находится выше по течению реки от посёлка  $C$  на некотором расстоянии. Между ними на расстоянии 4 км от  $A$  находится посёлок  $B$ . Из  $A$  в  $C$  плывёт плот. Одновременно с ним из  $B$  в  $A$  отправилась лодка. Она встретила плот ровно посередине между  $A$  и  $B$ , доплыла до  $A$  и сразу отправилась в  $C$ , снова встретив плот спустя 24 минуты после выхода из  $A$ . Найдите собственную скорость лодки (т.е. её скорость в стоячей воде). Ответ дайте в км/ч.

Ответ: \_\_\_\_\_

Ответ: 10.

**11** На рисунке изображен график функции  $y = ax^2 + bx + c$ , где  $a$ ,  $b$  и  $c$  — целые числа. Найдите  $y(-5)$ .



Ответ: \_\_\_\_\_

Ответ: 14.

**12** Найдите точку максимума функции  $y = \frac{x^2 + 3}{x - 1}$ .

Ответ: \_\_\_\_\_

Ответ: -1.

## Часть 2

**13** а) Решите уравнение  $\frac{4 \sin x \cdot \cos^2 x - \sin x}{\sqrt{-\operatorname{tg} x}} = 0$ .

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку  $\left[-\frac{9\pi}{4}; -\frac{3\pi}{4}\right]$ .

Ответ: а)  $\frac{2\pi}{3} + \pi k$ ; б)  $-\frac{4\pi}{3}$ .

**14** В правильной четырехугольной пирамиде  $PABCD$  сторона основания  $9\sqrt{2}$ , а боковое ребро 15. На высоте пирамиды  $PO$  отмечена точка  $K$ , делящая эту высоту в отношении  $1 : 2$ , начиная от точки  $O$ . Плоскость  $\alpha$  проходит через прямую  $BK$  параллельно  $AC$ .

а) Докажите, что плоскость  $\alpha$  делит ребро  $PD$  пополам.

б) Найдите угол между прямой  $PD$  и плоскостью сечения.

Ответ:  $\arccos\left(\frac{11}{5\sqrt{97}}\right)$ ,  $BM = \frac{3\sqrt{97}}{2}$ .

**15** Решите неравенство

$$(\log_{\sqrt{3}}(5-x) - 2\log_3(x^2 - 5x + 8)) \cdot \sqrt{x^3 - 8x^2 + 16x} \geq 0.$$

Ответ:  $[1; 3] \cup \{0\} \cup \{4\}$ .

**16** Михаил планирует в июле взять кредит в банке некоторую сумму на  $n$  лет, где  $n$  — натуральное число. Банк поставил следующие условия возврата:

— в январе долг возрастает на 20% по сравнению с концом предыдущего года;

— необходимо выплачивать часть долга с февраля по июнь каждого года;

— в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года.

Известно, что при этих условиях наименьший платёж, который должен будет внести Михаил, равен 4,08 млн.руб. Также Михаилу сообщили, что общие выплаты в 1,6 раз больше суммы, которую он планирует взять в кредит. Найдите общую сумму выплат, которые нужно будет сделать Михаилу.

Ответ: 27,2;  $n = 5$ ;  $S = 17$ .

**17** В треугольник  $ABC$  вписана окружность, касающаяся стороны  $AB$  в точке  $M$ , а стороны  $AC$  — в точке  $N$ . Биссектриса  $BF$  пересекается с прямой  $MN$  в точке  $T$ .

а) Докажите, что  $\angle BTC = 90^\circ$ .

б) Найдите площадь треугольника  $BTC$ , если  $BC = 6$ ,  $AF = 5$ ,  $CF = 4$ .

Ответ:  $S_{BTC} = \frac{27\sqrt{7}}{8}$ .

**18** Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых неравенство

$$\frac{4^{-x^2} + a \cdot 2^{-x^2} - 2a^2}{\sqrt{(2^{-x^2} + a - 1)^2}} \leq 0$$

выполняется для любого  $x$  из отрезка  $[1; 2]$ .

Ответ:  $a \in \left(-\infty; -\frac{1}{4}\right] \cup \left(\frac{15}{16}; +\infty\right)$ .

**19** На конкурсе музыкальных исполнителей в состав жюри входят 6 судей. Выступление конкурсанта оценивается каждым судьёй оценкой от 0 до 10 баллов включительно, при этом каждая оценка есть целое число. Затем итоговый балл конкурсанта вычисляется как среднее арифметическое всех выставленных оценок. На этом конкурсе решили протестировать новую систему оценивания, по которой наименьший и наибольший баллы отбрасываются, а итоговый балл вычисляется как среднее арифметическое оставшихся четырех оценок судей. За выступление Дмитрия все члены жюри выставили различные оценки.

**а)** Могли ли итоговые баллы за это выступление, посчитанные по старой и новой системам, совпасть?

**б)** Могла ли разность баллов, посчитанная по старой и новой системам, быть равной 0,125?

**в)** Какое наибольшее значение может принимать разность баллов, посчитанная по старой и новой системам?

Ответ: **а)** да; **б)** нет; **в)** 5/6.

# Тренировочная работа ЕГЭ по математике Профильный уровень, вариант 2, Салимова А.Ф.

11 класс, Лицей НИУ ВШЭ

22 апреля 2024 года

## Справочные материалы

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

## Часть 1

**1** В треугольнике  $ABC$  известны два угла:  $\angle A = 75^\circ$ ,  $\angle B = 70^\circ$ . На стороне  $AC$  выбрана точка  $P$  так, что  $AP = AB$ . Проведена биссектриса  $AM$ . Найдите  $\angle BPM$ . Ответ дайте в градусах.

Ответ: \_\_\_\_\_

Ответ: 17,5.

**2** Треугольник задан координатами вершин:  $A(-2, 4)$ ,  $B(4, 0)$ ,  $C(1, 6)$ . Найдите длину медианы  $CM$ .

Ответ: \_\_\_\_\_

Ответ: 4.

**3** Высота правильной шестиугольной пирамиды равна  $\sqrt{3}$ , а все боковые ребра пирамиды наклонены к плоскости её основания под углом  $30^\circ$ . Найдите объем пирамиды.

Ответ: \_\_\_\_\_

Ответ: 13,5.

**4** Игральный кубик бросают дважды. Найдите вероятность того, что в сумме выпадет не более 7 очков. Ответ округлите до сотых.

Ответ: \_\_\_\_\_

Ответ: 0,58.

5 Из 1400 лицейстов умеют кататься на лыжах 1200 человек, умеют кататься на коньках 952 лицейста. Не умеют кататься ни на лыжах, ни на коньках 60 лицейстов. Найдите вероятность того, что лицейст умеет кататься и на лыжах, и на коньках.

Ответ: \_\_\_\_\_

Ответ: 0,58.

6 Решите уравнение  $2 \log_{x-1}(x-3) = \log_{x-1}(6x-x^2-1)$ . Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите меньший из корней.

Ответ: \_\_\_\_\_

Ответ: 5.

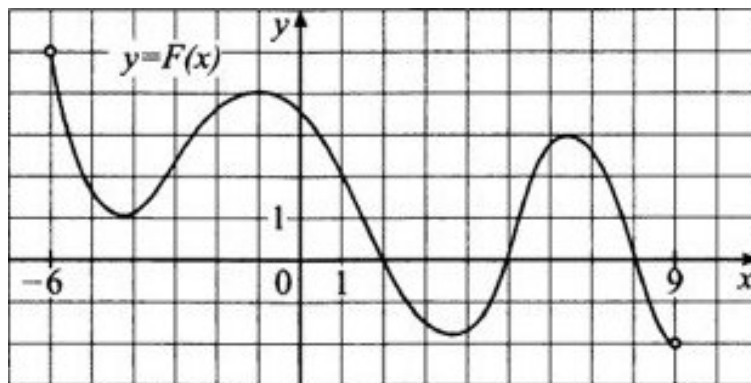
7 Найдите значение выражения при всех допустимых значениях  $\alpha$ :

$$\operatorname{tg}(\pi + \alpha) \cdot \left( \sin\left(\frac{5\pi}{2} + \alpha\right) + 4 \cos(3\pi - \alpha) \right) + \frac{3 \sin(2\alpha)}{2 \cos(2\pi - \alpha)} - 5 \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right).$$

Ответ: \_\_\_\_\_

Ответ: -2,5.

8 На рисунке изображен график функции  $y = F(x)$ , которая является одной из первообразных функции  $f(x)$ , определенной на интервале  $(-6; 9)$ . Найдите количество решений уравнения  $f(x) = 0$  на отрезке  $[-4; 6]$ .



Ответ: \_\_\_\_\_

Ответ: 2.

9 Давление газа  $p$  (в паскалях) и объем газа  $V$  (в  $\text{м}^3$ ) при адиабатическом процессе для идеального газа связаны соотношением  $p \cdot V^k = 3,2 \cdot 10^5$  при  $k = \frac{5}{4}$ . Какой объем в кубических метрах будет занимать газ при давлении  $1,024 \cdot 10^7$  Па?

Ответ: \_\_\_\_\_

Ответ: 0,0625.

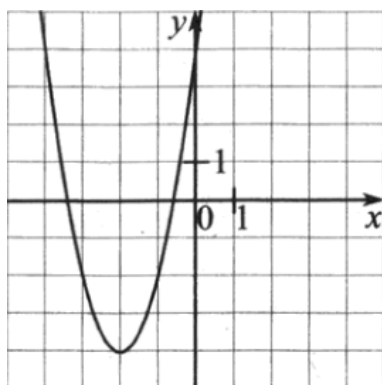
**10** Посёлок  $A$  находится выше по течению реки от посёлка  $C$  на расстоянии 18 км. Между ними на расстоянии 4 км от  $A$  находится посёлок  $B$ . Из  $A$  в  $C$  плывёт плот. Из  $B$  в  $A$  отправилась лодка. Она встретила плот ровно посередине между  $A$  и  $B$ , доплыла до  $A$  и сразу отправилась в  $C$ , затратив на весь свой путь 2 часа. На каком расстоянии от посёлка  $C$  произойдет вторая встреча плота и лодки? Ответ дайте в км.

Ответ: \_\_\_\_\_

Ответ: 12.

**11** На рисунке изображен график функции  $y = ax^2 + bx + c$ , где  $a$ ,  $b$  и  $c$  — целые числа. Найдите  $y(-8)$ .

Ответ: \_\_\_\_\_



Ответ: 68.

**12** Найдите наименьшее значение функции  $y = \frac{2}{x+1} + \frac{x}{2}$  на отрезке  $[0; 2, 5]$ .

Ответ: \_\_\_\_\_

Ответ: 1,5.

## Часть 2

**13** а) Решите уравнение  $\frac{4 \cos x \cdot \sin^2 x - \cos x}{\log_2(-\cos x)} = 0$ .

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку  $\left[-\frac{7\pi}{4}; -\frac{\pi}{4}\right]$ .

Ответ: а)  $\frac{5\pi}{6} + 2\pi k; -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n$  б)  $-\frac{7\pi}{6}, -\frac{5\pi}{6}$ .



**14** В правильной четырехугольной пирамиде  $PABCD$  сторона основания  $9\sqrt{2}$ , а боковое ребро 15. Точка  $M$  является серединой ребра  $PD$ . Плоскость  $\alpha$  проходит через прямую  $BM$  параллельно  $AC$ .

а) Докажите, что плоскость  $\alpha$  делит высоту  $OP$  в отношении  $2 : 1$ , начиная от вершины  $P$ .

б) Найдите расстояние от точки  $P$  до плоскости сечения.

Ответ:  $\frac{72}{\sqrt{97}}$ ,  $BM = \frac{3\sqrt{97}}{2}$ .

**15** Решите неравенство

$$(\log_{\sqrt{2}}(6-x) - 2\log_2(x^2 - 6x + 10)) \cdot \sqrt{x^3 - 10x^2 + 25x} \geq 0.$$

Ответ:  $[1; 4] \cup \{0\} \cup \{5\}$ .

**16** Дмитрий планирует в июле взять кредит в банке на сумму 17 млн.руб. на  $n$  лет, где  $n$  — натуральное число. Банк поставил следующие условия возврата:

- в январе долг возрастает на  $r\%$  по сравнению с концом предыдущего года;
- необходимо выплачивать часть долга с февраля по июнь каждого года;
- в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года.

Известно, что при этих условиях наибольший платёж, который должен будет внести Дмитрий, равен 6,8 млн.руб. Также Дмитрию сообщили, что общие выплаты в 1,6 раз больше суммы, которую он планирует взять в кредит. Какую процентную ставку  $r\%$  банк предложил Дмитрию?

Ответ:  $r = 20\%$ , общие выплаты 27,2;  $n = 5$ ;  $S = 17$ .

**17** В треугольник  $ABC$  вписана окружность с центром в точке  $O$ , которая касается стороны  $AB$  в точке  $M$ , а стороны  $AC$  — в точке  $N$ . Биссектриса  $BF$  пересекается с прямой  $MN$  в точке  $T$ .

а) Докажите, что  $\triangle OFC$  подобен  $\triangle NFT$ .

б) Найдите площадь треугольника  $BOC$ , если  $AB = 7,5$ ,  $AF = 5$ ,  $BC = 6$ .

Ответ:  $S_{BOC} = \frac{9\sqrt{7}}{4}$ .

**18** Найдите все значения параметра  $a$ , для каждого из которых неравенство

$$\frac{4^{-x^2} - a \cdot 2^{-x^2} - 2a^2}{\sqrt{(2^{-x^2} - a - 1)^2}} \leq 0$$

выполняется для любого  $x$  из отрезка  $[0; 2]$ .

Ответ:  $a \in (-\infty; -1] \cup \left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$ .

**19** На конкурсе музыкальных исполнителей вручается приз зрительских симпатий, каждый зритель может отдать свой голос за одного понравившегося ему исполнителя. Рейтинг конкурсанта формируется как доля проголосовавших за него зрителей, выраженная в процентах, округленная до целого числа.

**а)** Мог ли рейтинг конкурсанта быть равным 38, если всего проголосовало 11 зрителей?

**б)** Зрители голосуют за трех конкурсантов-призеров конкурса. Могло ли произойти так, что количество проголосовавших за каждого из этих конкурсантов разное, но рейтинг их оказался одинаковым?

**в)** Рейтинг Никиты равен 5. После этого за Никиту поступил еще один голос, но это не изменило рейтинг Никиты. При каком наименьшем количестве проголосовавших, включая последнего проголосовавшего, это возможно?

Ответ: **а)** нет; **б)** да; **в)** 110.