

Условия заданий 13-19 представлены в нескольких разновидностях для различных типов вариантов

13.1 а) Решите уравнение $\log_3(x^2 - 24x) = 4$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[\log_2 0,1; 12\sqrt{5}]$

Ответ: а) -3 и 27; б) -3

13.2 а) Решите уравнение $2x \cos x - 8 \cos x + x - 4 = 0$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$

Ответ: а) $4; \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z$ б) $\frac{2\pi}{3}$

14.1 В треугольной пирамиде PABC с основанием ABC известно, что AB=17, PB=10,

$\cos \angle PBA = \frac{32}{85}$. Основанием высоты этой пирамиды является точка C. Прямые PA и

BC перпендикулярны.

а) Докажите, что треугольник ABC прямоугольный

б) Найдите объем пирамиды PABC.

Ответ: б) 120

14.2 Основанием прямой четырехугольной призмы ABCDA₁B₁C₁D₁ является ромб ABCD, AB=AA₁

а) Докажите, что прямые A₁C и BD перпендикулярны

б) Найдите объем призмы, если A₁C=BD=2.

Ответ: б) $\frac{4\sqrt{6}}{5}$

15.1 Решите неравенство: $9^{4x-x^2-1} - 36 \cdot 3^{4x-x^2-1} + 243 \geq 0$

Ответ: $(-\infty; 1]; 2; [3; \infty)$

15.2 Решите неравенство: $\frac{\log_2(2x^2 - 17x + 35) - 1}{\log_7(x + 6)} \leq 0$

Ответ: $(-6; -5); \left[3; \frac{7}{2}\right); \left(5; \frac{11}{2}\right]$

16.1 Окружность, вписанная в трапецию ABCD, касается ее боковых сторон AB и CD в точках M и N соответственно. Известно, что AM=8MB и DN=2CN.

а) Докажите, что AD=4BC.

б) Найдите длину отрезка MN, если радиус окружности равен $\sqrt{6}$

Ответ: б) 4

16.2 В треугольник ABC, в котором длина стороны AC меньше длины стороны BC, вписана окружность с центром O. Точка B₁ симметрична точке B относительно CO.

а) Докажите, что A, B, O и B₁ лежат на одной окружности.

б) Найдите площадь четырехугольника AOBV₁, если AB=10, AC=6 и BC=8.

Ответ: б) 18

17.1 Вадим является владельцем двух заводов в разных городах. На заводах производятся абсолютно одинаковые товары при использовании одинаковых технологий. Если рабочие на одном из заводов трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят t единиц товара. За каждый час работы на заводе, расположенном в первом городе, Вадим платит рабочему 500 рублей, а на заводе, расположенном во втором городе, - 300 рублей. Вадим готов выделять 1 200 000 рублей в неделю на оплату труда рабочих. Какое наибольшее количество единиц товара можно произвести за неделю на этих двух заводах?

Ответ: 80

17.2 Пенсионный фонд владеет ценными бумагами, которые стоят $10t$ тыс. рублей в конце года t ($t = 1; 2; 3; \dots$). В конце любого года пенсионный фонд может продать ценные бумаги и положить деньги на счет в банке, при этом в конце каждого следующего года сумма на счете будет увеличиваться в $1 + r$ раз. Пенсионный фонд хочет продать ценные бумаги в конце такого года, чтобы в конце двадцать пятого года сумма на его счете была наибольшей. Расчеты показали, что для этого ценные бумаги нужно продавать строго в конце одиннадцатого года. При каких положительных значениях r это возможно?

Ответ: $\frac{1}{11} < r < \frac{1}{10}$

18.1 Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$x \cdot \sqrt{x - a} = \sqrt{4x^2 - (4a + 2)x + 2a}$$

имеет ровно один корень на отрезке $[0; 1]$

Ответ: $a < 0; 2 - \sqrt{2} \leq a \leq 1$

18.2 Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$\frac{(x - a - 7)(x + a - 2)}{\sqrt{10x - x^2 - a^2}} = 0$$

имеет ровно один корень на отрезке $[4; 8]$

Ответ: $\frac{-3 - \sqrt{41}}{2} < a < -3; a = -\frac{5}{2}; -2 < a \leq 1$

19.1 С натуральным числом производят следующую операцию: между каждыми двумя его соседними цифрами записывают сумму этих цифр (например, из числа 1923 получается число 110911253).

- а) Приведите пример числа, из которого получается 4106137125
 б) Может ли из какого-нибудь числа получиться число 27593118?
 в) Какое наибольшее число, кратное 9, может получиться из трехзначного числа, в десятичной записи которого нет девяток?

Ответ: а) 4675; б) нет; в) 8168157.

19.2 В каждой клетке квадратной таблицы 6×6 стоит натуральное число, меньшее 7. Вася в каждом столбце находит наименьшее число и складывает шесть найденных чисел. Петя в каждой строке находит наименьшее число и складывает шесть найденных чисел.

- а) Может ли сумма у Пети получиться в два раза больше, чем сумма у Васи?
 б) Может ли сумма у Пети получиться в шесть раз больше, чем сумма у Васи?
 в) В какое наибольшее число раз сумма у Пети может быть больше, чем сумма у Васи?

Ответ: а) да; б) нет; в) $\frac{31}{6}$.