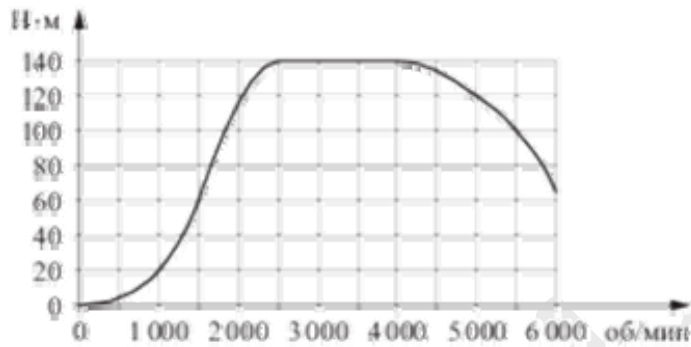


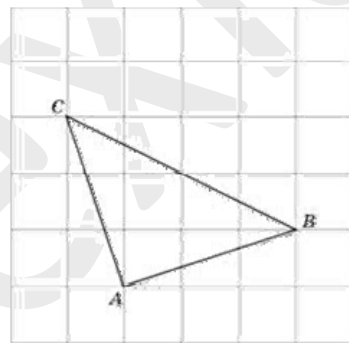
Часть 1

1. Цена на электрический чайник была повышена на 14% и составила 1596 рублей. Сколько рублей стоил чайник до повышения цены?

2. На графике изображена зависимость крутящего момента двигателя от числа его оборотов в минуту. На оси абсцисс откладывается число оборотов в минуту, на оси ординат — крутящий момент в Н·м. Скорость автомобиля (в км/ч) приближенно выражается формулой  $v = 0,036n$  где  $n$  — число оборотов двигателя в минуту. С какой наименьшей скоростью должен двигаться автомобиль, чтобы крутящий момент был равен 120 Н·м? Ответ дайте в километрах в час.



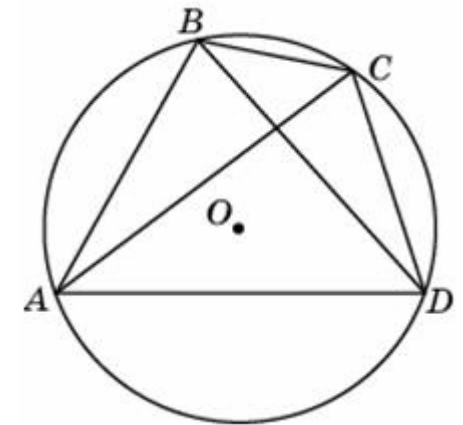
3. На клетчатой бумаге с размером клетки  $\sqrt{5} \times \sqrt{5}$  изображен треугольник ABC. Найдите длину его высоты, опущенной на сторону BC.



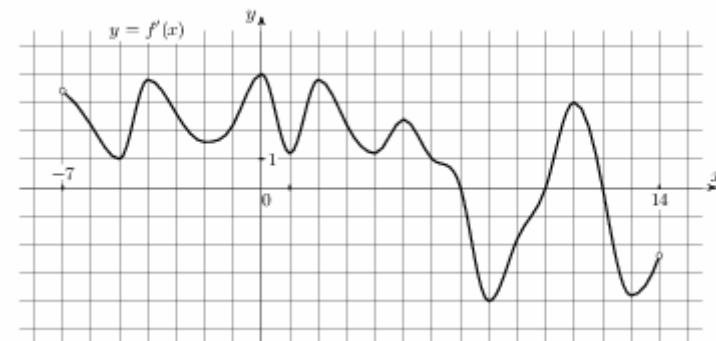
4. Научная конференция проводится в 5 дней. Всего запланировано 75 докладов — первые три дня по 17 докладов, остальные распределены поровну между четвёртым и пятым днями. На конференции планируется доклад профессора М. Порядок докладов определяется жеребьёвкой. Какова вероятность того, что доклад профессора М. окажется запланированным на последний день конференции?

5. Найдите корень уравнения:  $\left(\frac{1}{2}\right)^{6-2x} = 4$

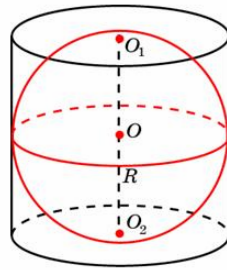
6. Четырёхугольник ABCD вписан в окружность. Угол ABC равен  $105^\circ$ , угол CAD равен  $35^\circ$ . Найдите угол ABD. Ответ дайте в градусах.



7. На рисунке изображён график  $y = f'(x)$  производной функции  $f(x)$ , определенной на интервале  $(-7; 14)$ . Найдите количество точек максимума функции  $f(x)$ , принадлежащих отрезку  $[-6; 9]$ .



8. Шар вписан в цилиндр. Площадь поверхности шара равна 111. Найдите площадь полной поверхности цилиндра.



Часть 2

9. Найдите значение выражения  $\sqrt{3} - \sqrt{12} \sin^2 \frac{5\pi}{12}$

10. Для получения на экране увеличенного изображения лампочки в лаборатории используется собирающая линза с главным фокусным расстоянием  $f = 30$  см. Расстояние  $d_1$  от линзы до лампочки может изменяться в пределах от 30 до 50 см, а расстояние  $d_2$  от линзы до экрана — в пределах от 150 до 180 см. Изображение на экране будет четким, если выполнено соотношение  $\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} = \frac{1}{f}$ . Укажите, на каком наименьшем расстоянии от линзы можно поместить лампочку, чтобы ее изображение на экране было четким. Ответ выразите в сантиметрах.

11. Расстояние между пристанями А и В равно 120 км. Из А в В по течению реки отправился плот, а через час вслед за ним отправилась яхта, которая, прибыв в пункт В, тотчас повернула обратно и возвратилась в А. К этому времени плот проплыл 24 км. Найдите скорость яхты в неподвижной воде, если скорость течения реки равна 2 км/ч. Ответ дайте в км/ч.

12. Найдите точку максимума функции  $y = \ln(x + 5)^5 - 5x$

**Условия заданий 13-19 представлены в нескольких разновидностях для различных типов вариантов**

- 13.1 а) Решите уравнение  $25^{\sin x} = \left(\frac{1}{5}\right)^{-\sqrt{2} \sin 2x}$
- б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку  $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$
- 13.2 а) Решите уравнение  $2 \log_2^2(2 \sin x) - 7 \log_2(2 \sin x) + 3 = 0$
- б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку  $\left[\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$
- 13.3 а) Решите уравнение  $\log_8(7\sqrt{3} \sin x - \cos 2x - 10) = 0$
- б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку  $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$

- 14.1 На ребрах АВ и ВС треугольной пирамиды ABCD отмечены точки М и N соответственно, причем  $AM:MB = CN:NB = 3:1$ . Точки Р и Q — середины ребер DA и DC соответственно
- а) Докажите, что точки Р, Q, М и N лежат в одной плоскости
- б) Найдите, в каком отношении эта плоскость делит объем пирамиды

- 14.2 Основанием четырехугольной пирамиды SABCD является прямоугольник ABCD, причем  $AB = 3\sqrt{2}$ ,  $BC = 6$ . Высота пирамиды падает в центр прямоугольника. Из вершин А и С опущены перпендикуляры AP и CQ на ребро SB
- а) Докажите, что точки Р — середина BQ
- б) Найдите угол между гранями SBA и SBC, если  $SD = 9$

- 14.3 В основании пирамиды PABCD — трапеция ABCD с большим основанием AD. Известно, что сумма углов BAD и ADC равна 90 градусов, а плоскости PAB и PCD перпендикулярны плоскости основания, прямые АВ и CD пересекаются в точке К.
- а) Доказать, что плоскость PAB перпендикулярна плоскости PCD.
- б) Найдите объем PKBC, если  $AB \cdot BC = CD = 3$ , а высота пирамиды PABCD равна 8.

- 15.1 Решите неравенство:  $\frac{\log_5(25x)}{\log_5 x - 2} + \frac{\log_5 x - 2}{\log_5(25x)} \geq \frac{6 - \log_5 x^4}{\log_5^2 x - 4}$

15.2 Решите неравенство:  $\frac{\log_2(4x^2) + 35}{\log_2^2 x - 36} \geq -1$

15.3 Решите неравенство:  $\frac{3^x}{3^x - 3} + \frac{3^x + 1}{3^x - 2} + \frac{5}{9^x - 5 \cdot 3^x + 6} \leq 0$

16.1 Точка E – середина боковой стороны CD трапеции ABCD. На её стороне AB взяли точку K так, что прямые CK и AE параллельны. Отрезки CK и BE пересекаются в точке O.

а) Докажите, что CO=KO.

б) Найдите отношение оснований трапеции BC : AD, если площадь треугольника BCK составляет  $\frac{9}{64}$  площади всей трапеции ABCD.

16.2 Основания трапеции равны 4 и 9, а её диагонали равны 5 и 12.

а) Докажите, что диагонали трапеции перпендикулярны.

б) Найдите высоту трапеции.

16.3 Две окружности с центрами  $O_1$  и  $O_2$  пересекаются в точках A и B, причем точки  $O_1$  и  $O_2$  лежат по разные стороны от прямой AB. Продолжение диаметра CA первой окружности и хорды CB этой же окружности пересекает вторую окружность в точках D и E соответственно.

а) Докажите, что треугольники CBD и  $O_1AO_2$  подобны.

б) Найдите AD, если углы DAE и BAC равны, радиус второй окружности в четыре раза больше радиуса первой и AB=2.

16.4 Две окружности касаются внутренним образом в точке A, причем меньшая окружность проходит через центр O большей. Диаметр BC большей окружности вторично пересекает меньшую окружность в точке M, отличной от точки A. Лучи AO и AM вторично пересекают большую окружность в точках P и Q соответственно. Точка C лежит на дуге AQ большей окружности, не содержащей точку P.

а) Докажите что прямые PQ и BC параллельны

б) Известно, что  $\sin \angle AOC = \frac{\sqrt{15}}{4}$ . Прямые PC и AQ пересекаются в точке K.

Найдите отношение QK:KA

17.1 В июле планируется взять кредит в банке на некоторую сумму. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на  $r\%$  по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплачивать часть долга

Найдите  $r$ , если известно, что если выплачивать по 777600 рублей, то кредит будет погашен за 4 года, а если ежегодно выплачивать по 1317600 рублей, то кредит будет полностью погашен за 2 года?

17.2 В июле 2020 года планируется взять кредит в банке на некоторую сумму. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на 20% по сравнению с концом предыдущего года;
  - с февраля по июнь каждого года необходимо выплачивать одним платежом часть долга
- Сколько рублей было взято в банке, если известно, что кредит был полностью погашен тремя равными платежами (то есть за 3 года) и сумма платежей превосходит взятую в банке сумму на 77200 рублей?

17.3 В июле 2020 года планируется взять кредит в банке на сумму 400000 рублей.

Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на  $r\%$  по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплачивать одним платежом часть долга

Найдите число  $r$ , если известно, что кредит был полностью погашен за два года, причем в первый год было переведено 330000 рублей, а во второй год – 121000 рублей.

18.1 Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{x-a} \cdot \sin x = -\sqrt{x-a} \cdot \cos x$$

имеет ровно один корень на отрезке  $[0; \pi]$

18.2 Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{2x-1} \cdot \ln(4x-a) = \sqrt{2x-1} \cdot \ln(5x+a)$$

имеет ровно один корень на отрезке  $[0; 1]$

18.3 Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых уравнение

$$\ln(4x-1) \cdot \sqrt{x^2 - 6x + 6a - a^2} = 0$$

имеет ровно один корень на отрезке  $[0; 3]$

**18.4** Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{5x-3} \cdot \ln(x^2 - 6x + 10 - a^2) = 0$$

имеет ровно один корень на отрезке  $[0;3]$

**19.1** Каждый из 32 студентов или писал одну из двух контрольных работ, или писал обе контрольные работы. За каждую работу можно было получить целое число баллов от 0 до 20 включительно. По каждой из двух контрольных работ в отдельности средний балл составил 14. Затем каждый студент назвал наивысший из своих баллов (если студент писал одну работу, то он назвал балл за нее). Среднее арифметическое названных баллов оказалось равно  $S$ .

- Приведите пример, когда  $S < 14$
- Могло ли значение  $S$  быть равным 17?
- Какое наименьшее значение могло принимать  $S$ , если обе контрольные работы писали 12 студентов?

**19.2** На доске написано 30 различных натуральных чисел, каждое из которых либо четное, либо его десятичная запись заканчивается на цифру 7. Сумма написанных чисел равна 810.

- Может ли на доске быть ровно 24 четных числа?
- Могут ли ровно два числа на доске оканчиваться на 7?
- Какое наименьшее количество чисел, оканчивающихся на 7, может быть на доске?

**19.3** На доске написано 100 различных натуральных чисел, сумма которых равна 5130

- Может ли оказаться, что на доске написано число 240?
- Может ли оказаться, что на доске нет числа 16?
- Какое наименьшее количество чисел, кратных 16, может быть на доске?