17 ТР № 99. Решите неравенство $\log_{2x}(x-4)\cdot\log_{x-1}(6-x)<0.$

Ответ: $(4;5)\cup(5;6)$.

Решение:

а) Решим неравенство методом рационализации.

Ограничения на x очевидны: $4<x<6.$ Для таких x:

$$\log_{2x}(x-4)\cdot\log_{x-1}(6-x)<0 \;\Leftrightarrow\; \frac{\log_2(x-4)}{\log_2(2x)}\cdot\frac{\log_2(6-x)}{\log_2(x-1)}<0 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\log_2(x-4)-\log_2 1}{\log_2(2x)-\log_2 1}\cdot\frac{\log_2(6-x)-\log_2 1}{\log_2(x-1)-\log_2 1}<0 \;\Leftrightarrow\; \frac{(x-4-1)\cdot(6-x-1)}{(2x-1)\cdot(x-1-1)}<0 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-5)\cdot(-x+5)}{\left(x-\frac{1}{2}\right)\cdot(x-2)}<0 \;\Leftrightarrow\; \frac{(x-5)^2}{\left(x-\frac{1}{2}\right)\cdot(x-2)}>0.$$

Но на $(4;6)$ $x-\frac{1}{2}>0,$ $x-2>0,$ следовательно, на $(4;6)$:

$\frac{(x-5)^2}{\left(x-\frac{1}{2}\right)\cdot(x-2)}>0 \;\Leftrightarrow\; (x-5)^2>0 \;\Leftrightarrow\; x\neq 5.$ Отсюда вывод: искомыми значениями переменной x являются элементы множества $(4;5)\cup(5;6)$.