Перепишем данное уравнение: $a^x+\log_a x=a^2-1$ (1)

При $a>1$ функция $f(x)=a^x+\log_a x$ возрастающая и непрерывная на области определения, сл-но, ур-е (1) имеет не более одного решения. Для того, чтобы уравнение имело ровно одно решение на $[1;2]$, необходимо и достаточно, чтобы $a^2-1\in[f(1);f(2)]$, или $a^2-1\in[a;a^2+\log_a 2]$.

При $a>1$ $a^2-1<a^2+\log_a 2$, поэтому для выполнения условия задачи потребуем $a^2-1\geq a$, откуда $a\geq\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

При $0<a<1$ функция $f(x)=a^x+\log_a x$ убывающая и непрерывная на области определения, сл-но, ур-е (1) имеет не более одного решения. Для того, чтобы уравнение имело ровно одно решение на $[1;2]$, необходимо и достаточно, чтобы $a^2-1\in[f(2);f(1)]$, или $a^2-1\in[a^2+\log_a 2;a]$

При $0<a<1$ $a^2-1<0<a$, поэтому для выполнения условия задачи потребуем $a^2-1\geq a^2+\log_a 2$, откуда $\frac{1}{2}\leq a<1$.

Ответ: $\frac{1}{2}\leq a<1$, $a\geq\frac{1+\sqrt{5}}{2}$