17 ТР № 101. Решите неравенство $\log_{2x^2-x}(3x-1)\cdot\log_{2x-x^2}(3-2x)\geq 0.$

Ответ: $\left[\frac{2}{3};1\right)\cup\left(1;\frac{3}{2}\right).$

Решение:

Найдем некоторые ограничения на x.

$$\begin{cases}3x-1>0\\2x-3<0\\2x^2-x>0\\x^2-2x<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>\frac{1}{3}\\x<\frac{3}{2}\\2x\left(x-\frac{1}{2}\right)>0\\x(x-2)<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{1}{3}<x<\frac{3}{2}\\0<x<2\\\left[\begin{array}{l}x<0\\x>\frac{1}{2}\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\ \frac{1}{2}<x<\frac{3}{2}.$$

Для таких x: $\log_{2x^2-x}(3x-1)\cdot\log_{2x-x^2}(3-2x)\geq 0\ \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\frac{\lg(3x-1)-\lg 1}{\lg(2x^2-x)-\lg 1}\cdot\frac{\lg(3-2x)-\lg 1}{\lg(2x-x^2)-\lg 1}\geq 0\quad\Leftrightarrow\quad\frac{(3x-1-1)\cdot(3-2x-1)}{(2x^2-x-1)\cdot(2x-x^2-1)}\geq 0\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{(3x-2)\cdot(2x-2)}{(2x^2-x-1)\cdot(x^2-2x+1)}\geq 0.$$

Найдем корни квадратного трехчлена $2x^2-x-1$.

$2x^2-x-1=0\ \Leftrightarrow\ x=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{4}\quad\Leftrightarrow\quad x=\frac{1\pm 3}{4}$. Далее:

$$\frac{\left(x-\frac{2}{3}\right)\cdot(x-1)}{\left(x+\frac{1}{2}\right)\cdot(x-1)(x-1)^2}\geq 0\ \Leftrightarrow\ \frac{\left(x-\frac{2}{3}\right)}{\left(x+\frac{1}{2}\right)\cdot(x-1)^2}\geq 0\ \Leftrightarrow\ \begin{cases}\dfrac{x-\frac{2}{3}}{x+\frac{1}{2}}\geq 0\\x\neq 1\end{cases}\ \Leftrightarrow\ \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x<-\frac{1}{2}\\x\geq\frac{2}{3}\end{array}\right.\\x\neq 1\end{cases}.$$

С учетом ограничений на x имеем: $\left[\begin{array}{l}\frac{2}{3}\leq x<1\\1<x<\frac{3}{2}\end{array}\right.$.