15 ТР № 101. Дано уравнение $\frac{\cos 6x}{\cos 2x}+\frac{\sin 6x}{\sin 2x}=2\cos 4x-\sqrt{3}.$

А) Решите уравнение.

Б) Найдите его корни, принадлежащие отрезку $[2;4]$.

Ответ: А) $\pm\frac{5\pi}{24}+\frac{\pi n}{2}\mid n\in Z.$ Б) $\frac{17\pi}{24};\frac{19\pi}{24};\frac{29\pi}{24}.$

Решение:

А) Найдем ограничения на x: $\sin 2x\cdot\cos 2x\neq 0 \Leftrightarrow 2\sin 2x\cdot\cos 2x\neq 0 \Leftrightarrow \sin 4x\neq 0$.

Для таких x:

$$\frac{\cos 6x}{\cos 2x}+\frac{\sin 6x}{\sin 2x}=2\cos 4x-\sqrt{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin 2x\cdot\cos 6x+\cos 2x\cdot\sin 6x-2\sin 2x\cdot\cos 2x\cdot\cos 4x+\sqrt{3}\sin 2x\cdot\cos 2x=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin 8x-\sin 4x\cdot\cos 4x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 4x=0 \Leftrightarrow 2\sin x\cdot\cos 4x-\sin 4x\cdot\cos 4x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 4x=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin 4x\cdot\cos 4x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 4x=0 \Leftrightarrow \cos 4x+\frac{\sqrt{3}}{2}=0 \Leftrightarrow \cos 4x=-\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4x=\pm\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)+2\pi n\mid n\in Z \Leftrightarrow 4x=\pm\frac{5\pi}{6}+2\pi n\mid n\in Z \Leftrightarrow x=\pm\frac{5\pi}{24}+\frac{\pi n}{2}\mid n\in Z.$$

Б) Отбор корней сделаем путем перебора подходящих значений n.

Из серии корней $\frac{5\pi}{24}+\frac{\pi n}{2}\mid n\in Z$:

Заметим, что отрицательные значения n здесь не подойдут. Значение $n=0$ тоже не подходит, так как $\frac{5\pi}{24}<\frac{5\cdot 3{,}2}{24}<2 \Leftrightarrow \frac{5\pi}{24}<\frac{16}{24}<2$.

При $n=1$ $x=\frac{5\pi}{24}+\frac{\pi}{2}=\frac{17\pi}{24}$. Докажем, что $2<\frac{17\pi}{24}<4.$

Для этого достаточно доказать: $\frac{17\cdot 3{,}2}{24}<4,$ $\frac{17\cdot 3{,}1}{24}>2$.

Действительно, $\frac{17\cdot 3{,}2}{24}<4 \Leftrightarrow 54{,}4<96$, $\frac{17\cdot 3{,}1}{24}>2 \Leftrightarrow 52{,}7>48.$

При $n=2$ $x=\frac{5\pi}{24}+\pi=\frac{29\pi}{24}$; $\frac{29\cdot 3{,}2}{24}<4 \Leftrightarrow 92{,}8<96$, $\frac{29\cdot 3{,}1}{24}>2 \Leftrightarrow 89{,}9>48$.

При $n=3$ $x=\frac{5\pi}{24}+\frac{3\pi}{2}=\frac{41\pi}{24}$; $\frac{41\cdot 3{,}1}{24}>4 \Leftrightarrow 127{,}1>96$. Этот корень уже не подходит. Дальнейшие поиски корней из этой серии смысла не имеют.

Из серии корней $-\frac{5\pi}{24}+\frac{\pi n}{2}\mid n\in Z$:

При отрицательных значениях n, $n=0$, несложно понять, искомых корней не будет.

При $n=1$ $x=-\frac{5\pi}{24}+\frac{\pi}{2}=\frac{7\pi}{24}$; $\frac{7\cdot 3{,}2}{24}<2 \Leftrightarrow 22{,}4<48.$ Корень не подходит.

При $n=2$ $x=-\frac{5\pi}{24}+\pi=\frac{19\pi}{24}$; $\frac{19\cdot 3{,}2}{24}<4 \Leftrightarrow 60{,}8<96,$ $\frac{19\cdot 3{,}1}{24}>2 \Leftrightarrow 58{,}9<48.$

При $n=3$ $x=-\frac{5\pi}{24}+\frac{3\pi}{2}=\frac{31\pi}{24}$; Но $\frac{31\cdot 3{,}1}{24}>4 \Leftrightarrow 96{,}1>96$. Корень не подходит, дальнейшие поиски просто излишни.