ФЕДЕРАЛЬНЫЙ ЦЕНТР ТЕСТИРОВАНИЯ

ФЕДЕРАЛЬНЫЙ ИНСТИТУТ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ

Вариант по математике № 5

Инструкция по выполнению работы

На выполнение экзаменационной работы по математике даётся 3 часа 55 минут (235 минут). Работа состоит из двух частей, включающих в себя 20 заданий.

Часть 1 содержит 14 заданий с кратким ответом (B1–B14) базового уровня по материалу курса математики. Ответом является целое число или конечная десятичная дробь.

Часть 2 содержит 6 более сложных заданий (C1–C6) по материалу курса математики. При их выполнении надо записать полное решение и ответ.

Все бланки заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой, капиллярной или перьевой ручки.

При выполнении заданий Вы можете пользоваться черновиком. Обращаем Ваше внимание, что записи в черновике не будут учитываться при оценивании работы.

Советуем выполнять задания в том порядке, в котором они даны. Для экономии времени пропускайте задание, которое не удаётся выполнить сразу, и переходите к следующему. Если после выполнения всей работы у Вас останется время, Вы сможете вернуться к пропущенным заданиям.

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

Желаем успеха!

ТЕСТ № 0020412116

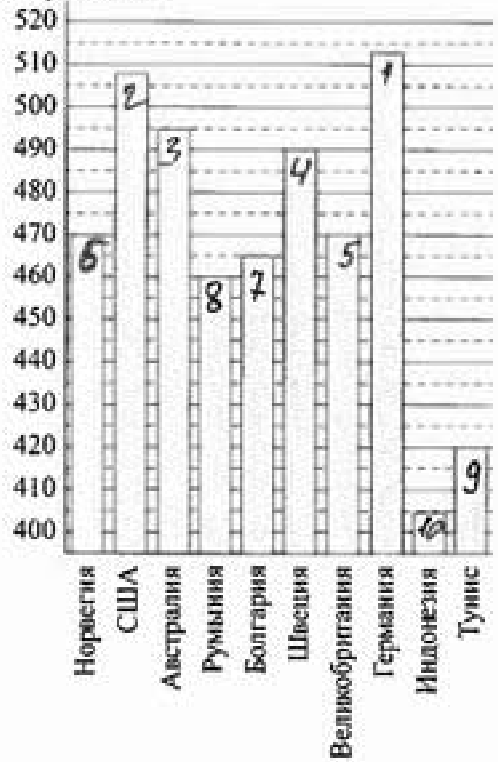
Часть 1

Ответом на задания B1–B14 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Ответ следует записать в бланк ответов № 1 справа от номера выполняемого задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак минус и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

B1 Летом килограмм клубники стоит 70 рублей. Маша купила 1 кг 200 г клубники. Сколько рублей сдачи она должна получить со 100 рублей?

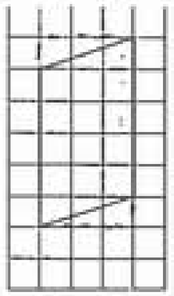
Ответ: ____________________.

B2 На диаграмме показан средний балл участников 10 стран в тестировании учащихся 8-го класса по математике в 2007 году (по 1000-балльной шкале). Среди указанных стран десятое место принадлежит Индонезии. Определите, какое место занимает Румыния.



Ответ: ____________________.

B3 Найдите площадь параллелограмма, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см (см. рис.). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



Ответ: ________________________.

B4 В таблице даны тарифы на услуги трёх фирм такси. Предполагается поездка длительностью 70 минут. Нужно выбрать фирму, в которой заказ будет стоить дешевле всего. Сколько рублей будет стоить этот заказ?

Фирма такси	Подача машины	Продолжительность и стоимость минимальной поездки	Стоимость 1 минуты сверх продолжительности минимальной поездки (в руб.)
А	350 руб.	Нет	14
Б	Бесплатно	10 мин. — 200 руб.	19
В	200 руб.	15 мин. — 225 руб.	16

Если поездка продолжается меньше указанного времени, она оплачивается по стоимости минимальной поездки.

Ответ: ________________________.

B5 Найдите корень уравнения $\sqrt{-4-4x}=4$.

Ответ: ________________________.

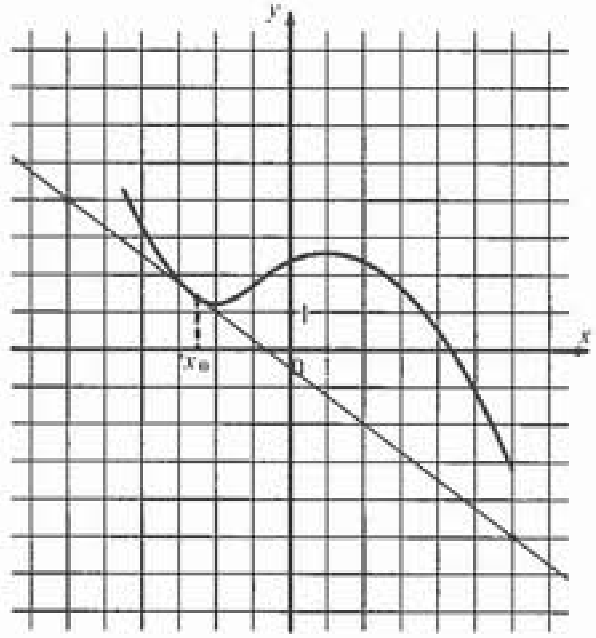
B6 Острые углы прямоугольного треугольника равны 79° и 11°. Найдите угол между высотой и биссектрисой, проведёнными из вершины прямого угла. Ответ дайте в градусах.

Ответ: ________________________.

B7 Найдите $\sin\alpha$, если $\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$ и $\alpha\in\left(\frac{3}{2}\pi;\ 2\pi\right)$.

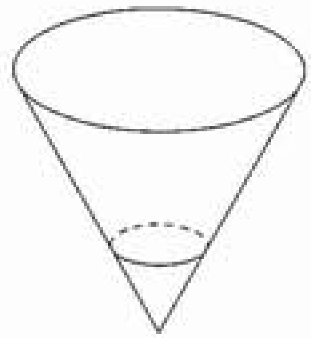
Ответ: ________________________.

B8 На рисунке изображены график функции $y=f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



Ответ: ________________________.

B9 В сосуд в виде конуса налита жидкость до $\frac{1}{3}$ высоты. Объём налитой жидкости 4 мл. Сколько миллилитров жидкости нужно долить, чтобы наполнить сосуд доверху?



Ответ: ________________________.

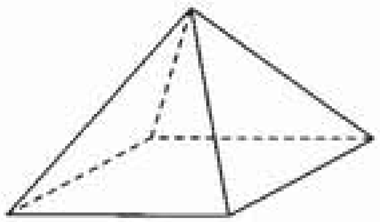
B10 В сборнике билетов по математике всего 45 билетов, в 9 из них встречается вопрос по логарифмам. Найдите вероятность того, что в случайно выбранном на экзамене билете школьнику достанется вопрос по логарифмам.

Ответ: ________________________.

ТЕСТ № 0020412116

0020412116

B11 Найдите площадь поверхности правильной четырёхугольной пирамиды, стороны основания которой равны 8 и высота равна 3.



Ответ: __________________________.

B12 При температуре $0\,^\circ\mathrm{C}$ рельс имеет длину $l_0=15$ м. При возрастании температуры происходит тепловое расширение рельса и его длина, выраженная в метрах, меняется по закону $l(t)=l_0(1+\alpha\cdot t)$, где $\alpha=1{,}2\cdot10^{-5}(^\circ\mathrm{C})^{-1}$ — коэффициент теплового расширения, t — температура (в градусах Цельсия). При какой температуре рельс удлинится на 3,6 мм? Ответ выразите в градусах Цельсия.

Ответ: __________________________.

B13 Смешав 35-процентный и 70-процентный растворы кислоты и добавив 10 кг чистой воды, получили 42-процентный раствор кислоты. Если бы вместо 10 кг воды добавили 10 кг 50-процентного раствора той же кислоты, то получили бы 46-процентный раствор кислоты. Сколько килограммов 35-процентного раствора использовали для получения смеси?

Ответ: __________________________.

B14 Найдите наибольшее значение функции $y=\log_{\frac{1}{3}}\left(x^2-4x+13\right)$.

Ответ: __________________________.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания С1–С6 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (С1, С2 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ.

C1 а) Решите уравнение $\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}-2x\right)=\sqrt{3}\sin x$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $[-3\pi;\,-2\pi]$.

C2 В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с основанием ABC проведено сечение через середины рёбер AB и BC и вершину S. Найдите площадь этого сечения, если боковое ребро пирамиды равно 10, а сторона основания равна 12.

C3 Решите систему неравенств

$$\begin{cases}\log_{6-x}\left(x^2-8x+41\right)\le 3\log_{6-x}3,\\ \dfrac{x^2-8x+13}{x-6}\le\dfrac{x-1}{2}.\end{cases}$$

C4 Две стороны треугольника равны 4 и 12, косинус угла между ними равен $\dfrac{1}{6}$.

В треугольник вписан ромб, имеющий с треугольником общий угол (вершина ромба, противоположная вершине этого угла, лежит на третьей стороне треугольника). Найдите сторону ромба.

C5 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $|\cos x+3\sin x-a|=3\cos x+\sin x+a$ имеет хотя бы одно решение на промежутке $\left(0;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

C6 Каждый из группы учащихся сходил в кино или в театр, при этом возможно, что кто-то из них мог сходить и в кино, и в театр. Известно, что в театре мальчиков было не более $\dfrac{1}{3}$ от общего числа учащихся группы, посетивших театр, а в кино мальчиков было не более $\dfrac{3}{8}$ от общего числа учащихся группы, посетивших кино.

а) Могло ли быть в группе 11 мальчиков, если дополнительно известно, что всего в группе было 22 учащихся?

б) Какое наибольшее количество мальчиков могло быть в группе, если дополнительно известно, что всего в группе было 22 учащихся?

в) Какую наименьшую долю могли составлять девочки от общего числа учащихся в группе без дополнительного условия пунктов *а* и *б*?

ТЕСТ № 0020412116

0020412116

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

C1

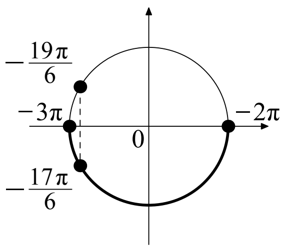
а) Решите уравнение $\cos\left(\frac{3\pi}{2}-2x\right)=\sqrt{3}\sin x$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-3\pi; -2\pi\right]$.

Ответ: а) $x=\pi n$, $n\in Z$; $x=\pm\frac{5\pi}{6}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; б) -3π; $-\frac{17\pi}{6}$; -2π.

а) $\cos\left(\frac{3\pi}{2}-2x\right)=-\sin 2x, -\sin 2x=-2\sin x\cos x$. Поэтому уравнение можно переписать в виде $2\sin x\cos x+\sqrt{3}\sin x=0$, откуда $2\sin x\left(\cos x+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=0$. Значит, $\sin x=0$, откуда $x=\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$, или $\cos x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, откуда $x=\pm\frac{5\pi}{6}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$.

б) Отберём с помощью единичной окружности корни уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-3\pi; -2\pi\right]$: $x=-3\pi$; $x=-\frac{17\pi}{6}$; $x=-2\pi$.



Замечание. Отбор корней может быть обоснован и любым другим способом: с помощью оценок, графика, решения двойных неравенств и т.п.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в п. а) и в п. б)	2
Обоснованно получен верный ответ в п. а), но обоснование отбора корней в п. б) не приведено или задача в п. а) обоснованно сведена к исследованию простейших тригонометрических уравнений без предъявления верного ответа, а в п. б) приведен обоснованный отбор корней	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

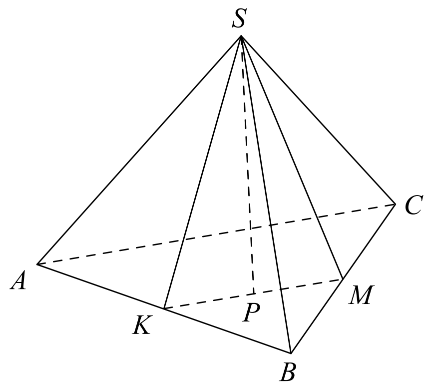
C2

В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с основанием ABC проведено сечение через середины рёбер AB и BC и вершину S. Найдите площадь этого сечения, если боковое ребро пирамиды равно 10, а сторона основания равна 12.

Ответ: $3\sqrt{55}$.

Сечением является равнобедренный треугольник SKM, причём его основание KM – средняя линия треугольника ABC.

$$KM=\frac{1}{2}AC=6.$$



SM – высота равнобедренного треугольника SCB. $SM=\sqrt{10^2-6^2}=8$. Пусть P – середина MK. Тогда высота SP треугольника SKM равна

$$\sqrt{SM^2-MP^2}=\sqrt{64-9}=\sqrt{55}.$$

Площадь сечения равна

$$SP\cdot MP=\sqrt{55}\cdot 3=3\sqrt{55}.$$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит обоснованный переход к планиметрической задаче, но получен неверный ответ или решение не закончено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

C3 Решите систему неравенств

$$\begin{cases}\log_{6-x}\left(x^2-8x+41\right)\le 3\log_{6-x}3,\\ \dfrac{x^2-8x+13}{x-6}\le\dfrac{x-1}{2}.\end{cases}$$

Ответ: $\left[4-\sqrt{2};\ 4\right]$, $\left[4+\sqrt{2};\ 6\right)$.

Решим первое неравенство. При $6-x>1$ получаем:

$0<x^2-8x+41\le 27$; $x^2-8x+14\le 0$, откуда $4-\sqrt{2}\le x\le 4+\sqrt{2}$.

Учитывая условие $x<5$, получаем: $4-\sqrt{2}\le x<5$.

При $0<6-x<1$:

$$x^2-8x+41\ge 27,\text{ откуда } x\le 4-\sqrt{2}\text{ или } x\ge 4+\sqrt{2}.$$

Учитывая условие $5<x<6$, получаем, что в этом случае $4+\sqrt{2}\le x<6$.

Объединяя промежутки, получаем решение первого неравенства:

$$4-\sqrt{2}\le x<5\text{ или }4+\sqrt{2}\le x<6.$$

Решим второе неравенство:

$$\frac{2x^2-16x+26-x^2+7x-6}{x-6}\le 0;\ \frac{x^2-9x+20}{x-6}\le 0;\ \frac{(x-5)(x-4)}{x-6}\le 0,$$

откуда $x\le 4$ или $5\le x<6$.

Учитывая, что $2<4-\sqrt{2}<4$ и $5<4+\sqrt{2}<6$, получаем решение системы:

$$4-\sqrt{2}\le x\le 4\text{ или }4+\sqrt{2}\le x<6.$$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Обоснованно получены верные ответы в обоих неравенствах	2
Обоснованно получен верный ответ в одном неравенстве системы неравенств	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

C4 Две стороны треугольника равны 4 и 12, косинус угла между ними равен $\frac{1}{6}$.

В треугольник вписан ромб, имеющий с треугольником общий угол (вершина ромба, противоположная вершине этого угла, лежит на третьей стороне треугольника). Найдите сторону ромба.

Ответ: 3 или 6.

Пусть в треугольнике ABC известно, что $AB=12$, $AC=4$, $\angle BAC=\alpha$, $\cos\alpha=\frac{1}{6}$. По теореме косинусов

$$BC=\sqrt{AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cos\alpha}=\sqrt{144+16-2\cdot 12\cdot 4\cdot\frac{1}{6}}=12,$$

значит, треугольник ABC — равнобедренный, $BC=AB=12$.

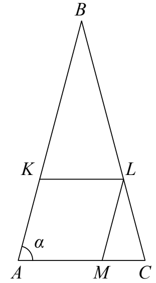


Рис. 1

Рассмотрим случай, когда общий угол треугольника и ромба — это угол при вершине A (рис. 1). Пусть $AKLM$ — ромб со стороной x, причём вершина L ромба лежит на стороне BC треугольника ABC, а вершина M — на стороне AC. Треугольники KBL и ABC подобны, т.к. $KL\parallel AC$, значит, $\frac{KL}{AC}=\frac{BK}{AB}$, или $\frac{x}{4}=\frac{12-x}{12}$. Из этого уравнения находим, что $x=3$.

В случае, когда C — общий угол ромба и треугольника, получим тот же результат.

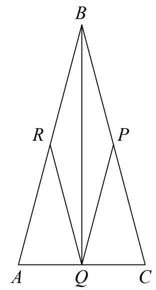


Рис. 2

Предположим теперь, что общий угол треугольника и ромба — это угол при вершине B (рис. 2). Пусть $BPQR$ — ромб, причём вершина Q ромба лежит на основании AC треугольника ABC, а вершина R — на

© 2012 ФГБУ «Федеральный центр тестирования» WWW.RUSTEST.RU
ФГБНУ «Федеральный институт педагогических измерений» WWW.FIPI.RU
Копирование не допускается

стороне AB. Точка Q — середина AC (т.к. BQ — биссектриса, а значит, и медиана равнобедренного треугольника ABC) и $QR \parallel BC$, поэтому QR — средняя линия треугольника ABC. Следовательно, $QR = \frac{1}{2}BC = 6$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Рассмотрена хотя бы одна геометрическая конфигурация, для которой получено правильное значение искомой величины	2
Рассмотрена хотя бы одна геометрическая конфигурация, для которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

C5 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $|\cos x + 3\sin x - a| = 3\cos x + \sin x + a$ имеет хотя бы одно решение на промежутке $\left(0;\ \frac{\pi}{2}\right]$.

Ответ: $(-1;\ 1]$.

Раскрывая модуль, получаем:

$$\begin{cases} 3\cos x + \sin x + a \geq 0, \\ \left[\begin{array}{l} \cos x + 3\sin x - a = -3\cos x - \sin x - a, \\ \cos x + 3\sin x - a = 3\cos x + \sin x + a. \end{array}\right. \end{cases}$$

Решим уравнения, не обращая внимания на неравенство. Первое уравнение приводится к виду $\cos x + \sin x = 0$; $\operatorname{tg} x = -1$. На промежутке $\left(0;\ \frac{\pi}{2}\right]$ решений нет. Второе уравнение приводится к виду

$$\sin x - \cos x = a;$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x - \frac{1}{\sqrt{2}}\cos x = \frac{a}{\sqrt{2}};$$

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{a}{\sqrt{2}}.$$

Если $0 < x \leq \frac{\pi}{2}$, то

$$-\frac{\pi}{4} < x - \frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi}{4}; \qquad -1 < \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \leq 1.$$

Значит, уравнение имеет корень на этом промежутке, если и только если $-1 < a \leq 1$.

Докажем, что при найденных значениях a неравенство $3\cos x + \sin x + a \geq 0$ верно.

$$(3\cos x + \sin x)^2 = 9\cos^2 x + \sin^2 x + 6\sin x\cos x = 1 + 8\cos^2 x + 6\sin x\cos x.$$

При $0 < x \leq \frac{\pi}{2}$ получаем: $(3\cos x + \sin x)^2 \geq 1$. Следовательно,

$$3\cos x + \sin x + a \geq 1 + a > 1 - 1 = 0.$$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
Получен верный ответ, но он недостаточно обоснован или в обосновании содержатся неточности	3
Ход решения в целом верен, верно получена либо верхняя, либо нижняя граница множества решений, ответ неверен	2
Решение содержит верную геометрическую интерпретацию задачи или верный переход к равносильной системе без модулей, дальнейшие содержательные продвижения отсутствуют	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

C6 Каждый из группы учащихся сходил в кино или в театр, при этом возможно, что кто-то из них мог сходить и в кино, и в театр. Известно, что в театре мальчиков было не более $\frac{1}{3}$ от общего числа учащихся группы, посетивших театр, а в кино мальчиков было не более $\frac{3}{8}$ от общего числа учащихся группы, посетивших кино.

а) Могло ли быть в группе 11 мальчиков, если дополнительно известно, что всего в группе было 22 учащихся?

б) Какое наибольшее количество мальчиков могло быть в группе, если дополнительно известно, что всего в группе было 22 учащихся?

в) Какую наименьшую долю могли составлять девочки от общего числа учащихся в группе без дополнительного условия пунктов *а* и *б*?

Ответ: а) да; б) 11; в) $\frac{10}{21}$.

а) Если группа состоит из 5 мальчиков, посетивших только театр, 6 мальчиков, посетивших только кино, и 11 девочек, сходивших и в театр, и в кино, то условие задачи выполнено. Значит, в группе из 22 учащихся могло быть 11 мальчиков.

б) Предположим, что мальчиков было 12 или больше. Тогда девочек было 10 или меньше. Театр посетили не более 5 мальчиков, поскольку если бы их было 6 или больше, то доля мальчиков в театре была бы не меньше $\frac{6}{6+11}=\frac{6}{17}$, что больше $\frac{1}{3}$. Аналогично, кино посетили не более 6 мальчиков, поскольку $\frac{7}{7+11}=\frac{7}{18}>\frac{3}{8}$, но тогда хотя бы один мальчик не посетил ни театра, ни кино, что противоречит условию.

В предыдущем пункте было показано, что в группе из 22 учащихся могло быть 11 мальчиков. Значит, наибольшее количество мальчиков в группе — 11.

в) Предположим, что некоторый мальчик сходил и в театр, и в кино. Если бы вместо него в группе присутствовали два мальчика, один из которых посетил только театр, а другой — только кино, то доля мальчиков и в театре, и в кино осталась бы прежней, а общая доля девочек стала бы меньше. Значит, для оценки наименьшей доли девочек в группе можно считать, что каждый мальчик сходил или только в театр, или только в кино.

Пусть в группе m_1 мальчиков, посетивших театр, m_2 мальчиков, посетивших кино, и d девочек. Оценим долю девочек в этой группе. Будем считать, что все девочки ходили и в театр, и в кино, поскольку их доля в группе от этого не изменится, а доля в театре и в кино не уменьшится.

По условию $\frac{m_1}{m_1+d}\le\frac{1}{3}$, $\frac{m_2}{m_2+d}\le\frac{3}{8}$, значит, $\frac{m_1}{d}\le\frac{1}{2}$, $\frac{m_2}{d}\le\frac{3}{5}$. Тогда $\frac{m_1+m_2}{d}\le\frac{11}{10}$, поэтому доля девочек в группе:

$$\frac{d}{m_1+m_2+d}=\frac{1}{\frac{m_1+m_2}{d}+1}\ge\frac{1}{\frac{11}{10}+1}=\frac{10}{21}.$$

Если группа состоит из 5 мальчиков, посетивших только театр, 6 мальчиков, посетивших только кино, и 10 девочек, сходивших и в театр, и в кино, то условие задачи выполнено, а доля девочек в группе равна $\frac{10}{21}$.

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: — обоснованное решение п. *а*; — обоснованное решение п. *б*; — искомая оценка в п. *в*; — пример в п. *в*, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Ответы

	Вариант 4	Вариант 5	Вариант 6	Вариант 7
B1	60	16	20	46
B2	6	8	7	4
B3	35	15	18	21
B4	960	1305	750	835
B5	-7	-5	-8	-4
B6	29	34	26	18
B7	-0,3	-0,5	-0,2	-0,9
B8	-0,25	-0,75	-1,25	-1,75
B9	315	104	77	152
B10	0,64	0,2	0,14	0,1
B11	96	144	384	864
B12	25	20	60	37,5
B13	70	80	45	10
B14	-1	-2	-2	-3