



ФЕДЕРАЛЬНЫЙ ЦЕНТР ТЕСТИРОВАНИЯ

ФЕДЕРАЛЬНЫЙ ИНСТИТУТ
ПЕДАГОГИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ

Вариант по математике № 6

Инструкция по выполнению работы

На выполнение экзаменационной работы по математике даётся 3 часа 55 минут (235 минут). Работа состоит из двух частей, включающих в себя 20 заданий.

Часть 1 содержит 14 заданий с кратким ответом (B1–B14) базового уровня по материалу курса математики. Ответом является целое число или конечная десятичная дробь.

Часть 2 содержит 6 более сложных заданий (C1–C6) по материалу курса математики. При их выполнении надо записать полное решение и ответ.

Все бланки заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой, капиллярной или перьевой ручки.

При выполнении заданий Вы можете пользоваться черновиком. Обращаем Ваше внимание, что записи в черновике не будут учитываться при оценивании работы.

Советуем выполнять задания в том порядке, в котором они даны. Для экономии времени пропускайте задание, которое не удаётся выполнить сразу, и переходите к следующему. Если после выполнения всей работы у Вас останется время, Вы сможете вернуться к пропущенным заданиям.

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

Желаем успеха!

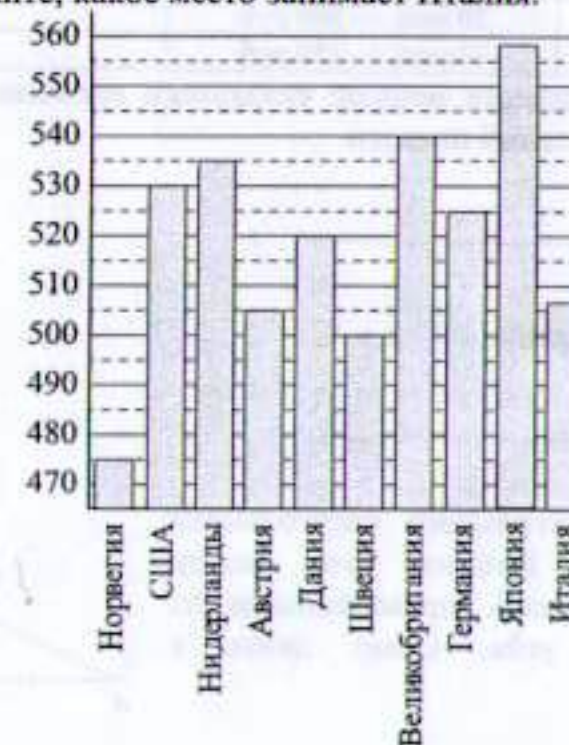
Часть 1

Ответом на задания B1–B14 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Ответ следует записать в бланк ответов № 1 справа от номера выполняемого задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак минус и запятую пишете в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

- B1** Летом килограмм клубники стоит 80 рублей. Маша купила 2 кг 250 г клубники. Сколько рублей сдачи она должна получить с 200 рублей?

Ответ: _____

- B2** На диаграмме показан средний балл участников 10 стран в тестировании учащихся 4-го класса по математике в 2007 году (по 1000-балльной шкале). Среди указанных стран первое место принадлежит Японии, десятое место – Норвегии. Определите, какое место занимает Италия.



Ответ: _____





B3 Найдите площадь параллелограмма, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см (см. рис.). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



Ответ: _____.

B4 В таблице даны тарифы на услуги трёх фирм такси. Предполагается поездка длительностью 50 минут. Нужно выбрать фирму, в которой заказ будет стоить дешевле всего. Сколько рублей будет стоить этот заказ?

Фирма такси	Подача машины	Продолжительность и стоимость минимальной поездки	Стоимость 1 минуты сверх продолжительности минимальной поездки (в руб.)
А	300 руб.	Нет	11
Б	Бесплатно	20 мин. — 300 руб.	18
В	120 руб.	10 мин. — 150 руб.	12

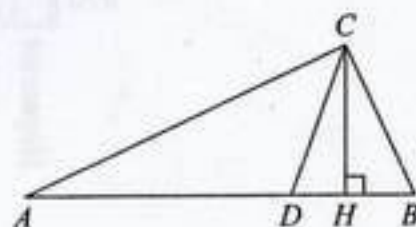
Если поездка продолжается меньше указанного времени, она оплачивается по стоимости минимальной поездки.

Ответ: _____.

B5 Найдите корень уравнения $\sqrt{8-x} = 4$.

Ответ: _____.

B6 Острые углы прямоугольного треугольника равны 71° и 19° . Найдите угол между высотой и биссектрисой, проведёнными из вершины прямого угла. Ответ дайте в градусах.

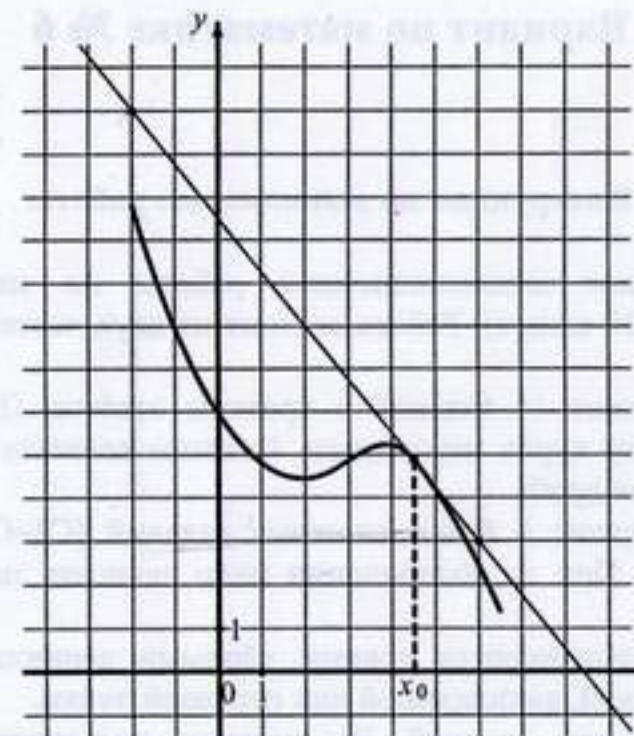


Ответ: _____.

B7 Найдите $\sin \alpha$, если $\cos \alpha = \frac{2\sqrt{6}}{5}$ и $\alpha \in \left(\frac{3}{2}\pi; 2\pi\right)$.

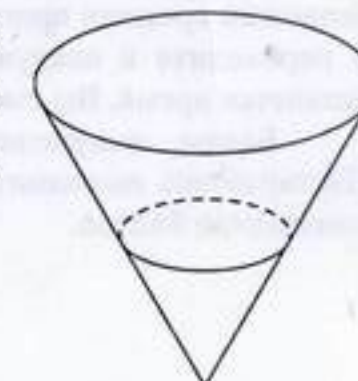
Ответ: _____.

B8 На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .



Ответ: _____.

B9 В сосуд в виде конуса налита жидкость до $\frac{1}{2}$ высоты. Объём налитой жидкости 11 мл. Сколько миллилитров жидкости нужно долить, чтобы наполнить сосуд доверху?



Ответ: _____.

B10 В сборнике билетов по химии всего 50 билетов, в 7 из них встречается вопрос по углеводородам. Найдите вероятность того, что в случайно выбранном на экзамене билете школьнику достанется вопрос по углеводородам.

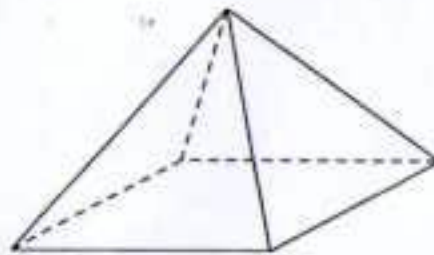
Ответ: _____.





- B11** Найдите площадь поверхности правильной четырёхугольной пирамиды, стороны основания которой равны 12 и высота равна 8.

Ответ: _____



- B12** При температуре 0°C рельс имеет длину $l_0 = 12,5$ м. При возрастании температуры происходит тепловое расширение рельса и его длина, выраженная в метрах, меняется по закону $l(t) = l_0(1 + \alpha \cdot t)$, где $\alpha = 1,2 \cdot 10^{-5} (\text{C}^\circ)^{-1}$ — коэффициент теплового расширения, t — температура (в градусах Цельсия). При какой температуре рельс удлинится на 9 мм? Ответ выразите в градусах Цельсия.

Ответ: _____

- B13** Смешав 69-процентный и 71-процентный растворы кислоты и добавив 10 кг чистой воды, получили 63-процентный раствор кислоты. Если бы вместо 10 кг воды добавили 10 кг 50-процентного раствора той же кислоты, то получили бы 68-процентный раствор кислоты. Сколько килограммов 69-процентного раствора использовали для получения смеси?

Ответ: _____

- B14** Найдите наибольшее значение функции $y = \log_{\frac{1}{2}}(x^2 + 6x + 13)$.

Ответ: _____

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания C1–C6 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (C1, C2 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ.

- C1** а) Решите уравнение $\cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = \sqrt{2} \cos x$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $[-6\pi; -5\pi]$.

- C2** В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с основанием ABC проведено сечение через середины рёбер AB и BC и вершину S . Найдите площадь этого сечения, если боковое ребро пирамиды равно 9, а сторона основания равна 4.

- C3** Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \log_{4-x}(x^2 - 4x + 27) \leq 2 \log_{4-x} 5, \\ \frac{x^2 - 4x + 1}{x - 4} \leq \frac{x + 1}{2}. \end{cases}$$

- C4** Две стороны треугольника равны 9 и 12, косинус угла между ними равен $\frac{2}{3}$.

В треугольник вписан ромб, имеющий с треугольником общий угол (вершина ромба, противоположная вершине этого угла, лежит на третьей стороне треугольника). Найдите сторону ромба.

- C5** Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение $|\cos x + 2 \sin x + a| = a - 2 \cos x - \sin x$ имеет хотя бы одно решение на промежутке $\left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$.

- C6** Каждый из группы учащихся сходил в кино или в театр, при этом возможно, что кто-то из них мог сходить и в кино, и в театр. Известно, что в театре мальчиков было не более $\frac{5}{13}$ от общего числа учащихся группы, посетивших театр, а в кино мальчиков было не более $\frac{1}{3}$ от общего числа учащихся группы, посетивших кино.

а) Могло ли быть в группе 9 мальчиков, если дополнительно известно, что всего в группе было 18 учащихся?

б) Какое наибольшее количество мальчиков могло быть в группе, если дополнительно известно, что всего в группе было 18 учащихся?

в) Какую наименьшую долю могли составлять девочки от общего числа учащихся в группе без дополнительного условия пунктов а и б?



Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

C1

а) Решите уравнение $\cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = \sqrt{2} \cos x$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $[-6\pi; -5\pi]$.

Ответ: а) $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}; x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z};$

б) $-\frac{23\pi}{4}; -\frac{11\pi}{2}; -\frac{21\pi}{4}$.

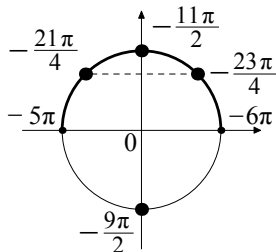
а) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = \sin 2x, \sin 2x = 2\sin x \cos x$. Поэтому уравнение можно

переписать в виде $2\sin x \cos x - \sqrt{2} \cos x = 0$, откуда $2\cos x \left(\sin x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0$.

Значит, $\cos x = 0$, откуда $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$, или $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, откуда

$x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

б) Отберём с помощью единичной окружности корни уравнения, принадлежащие промежутку $[-6\pi; -5\pi]$: $x = -\frac{23\pi}{4}; x = -\frac{11\pi}{2}; x = -\frac{21\pi}{4}$.



Замечание. Отбор корней может быть обоснован и любым другим способом: с помощью оценок, графика, решения двойных неравенств и т.п.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в п. а) и в п. б)	2
Обоснованно получен верный ответ в п. а), но обоснование отбора корней в п. б) не приведено или задача в п. а) обоснованно сведена к исследованию простейших тригонометрических уравнений без предъявления верного ответа, а в п. б) приведен обоснованный отбор корней	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

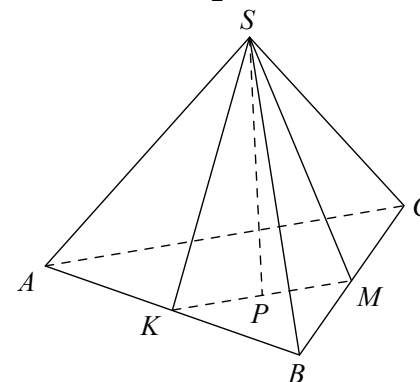
C2

В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с основанием ABC проведено сечение через середины рёбер AB и BC и вершину S . Найдите площадь этого сечения, если боковое ребро пирамиды равно 9, а сторона основания равна 4.

Ответ: $2\sqrt{19}$.

Сечением является равнобедренный треугольник SKM , причём его основание KM — средняя линия треугольника ABC .

$$KM = \frac{1}{2} AC = 2.$$



SM — высота равнобедренного треугольника SCB . $SM = \sqrt{9^2 - 2^2} = \sqrt{77}$. Пусть P — середина KM . Тогда высота SP треугольника SKM равна

$$\sqrt{SM^2 - MP^2} = \sqrt{77 - 1} = 2\sqrt{19}.$$

Площадь сечения равна

$$SP \cdot MP = 2\sqrt{19} \cdot 1 = 2\sqrt{19}.$$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит обоснованный переход к планиметрической задаче, но получен неверный ответ или решение не закончено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	2

C3 Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \log_{4-x}(x^2 - 4x + 27) \leq 2 \log_{4-x} 5, \\ \frac{x^2 - 4x + 1}{x - 4} \leq \frac{x + 1}{2}. \end{cases}$$

Ответ: $[2 - \sqrt{2}; 2]$, $[2 + \sqrt{2}; 4)$.

Решим первое неравенство. При $4 - x > 1$ получаем:

$$0 < x^2 - 4x + 27 \leq 25; \quad x^2 - 4x + 2 \leq 0, \quad \text{откуда } 2 - \sqrt{2} \leq x \leq 2 + \sqrt{2}.$$

Учитывая условие $x < 3$, получаем: $2 - \sqrt{2} \leq x < 3$.

При $0 < 4 - x < 1$:

$$x^2 - 4x + 27 \geq 25, \quad \text{откуда } x \leq 2 - \sqrt{2} \text{ или } x \geq 2 + \sqrt{2}.$$

Учитывая условие $3 < x < 4$, получаем, что в этом случае $2 + \sqrt{2} \leq x < 4$.

Объединяя промежутки, получаем решение первого неравенства: $2 - \sqrt{2} \leq x < 3$ или $2 + \sqrt{2} \leq x < 4$.

Решим второе неравенство:

$$\frac{2x^2 - 8x + 2 - x^2 + 3x + 4}{x - 4} \leq 0; \quad \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 4} \leq 0; \quad \frac{(x - 3)(x - 2)}{x - 4} \leq 0,$$

откуда $x \leq 2$ или $3 \leq x < 4$.

Учитывая, что $0 < 2 - \sqrt{2} < 2$ и $3 < 2 + \sqrt{2} < 4$, получаем решение системы:

$$2 - \sqrt{2} \leq x \leq 2 \text{ или } 2 + \sqrt{2} \leq x < 4.$$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Обоснованно получены верные ответы в обоих неравенствах	2
Обоснованно получен верный ответ в одном неравенстве системы неравенств	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	3

C4 Две стороны треугольника равны 9 и 12, косинус угла между ними равен $\frac{2}{3}$.

В треугольник вписан ромб, имеющий с треугольником общий угол (вершина ромба, противоположная вершине этого угла, лежит на третьей стороне треугольника). Найдите сторону ромба.

Ответ: $\frac{9}{2}$ или $\frac{36}{7}$.

Пусть в треугольнике ABC известно, что $AB = 9$, $AC = 12$, $\angle BAC = \alpha$, $\cos \alpha = \frac{2}{3}$. По теореме косинусов

$$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cos \alpha} = \sqrt{81 + 144 - 2 \cdot 9 \cdot 12 \cdot \frac{2}{3}} = 9,$$

значит, треугольник ABC — равнобедренный, $BC = AB = 9$.

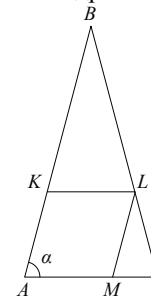


Рис. 1

Рассмотрим случай, когда общий угол треугольника и ромба — это угол при вершине A (рис. 1). Пусть $AKLM$ — ромб со стороной x , причём вершина L ромба лежит на стороне BC треугольника ABC , а вершина M — на стороне AC . Треугольники KBL и ABC подобны, т.к. $KL \parallel AC$, значит, $\frac{KL}{AC} = \frac{BK}{AB}$, или $\frac{x}{12} = \frac{9-x}{9}$. Из этого уравнения находим, что $x = \frac{36}{7}$.

В случае, когда C — общий угол ромба и треугольника, получим тот же результат.

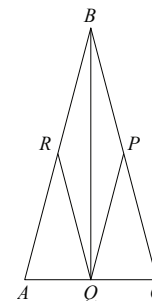


Рис. 2

Предположим теперь, что общий угол треугольника и ромба — это угол при вершине B (рис. 2). Пусть $BPQR$ — ромб, причём вершина Q ромба лежит на основании AC треугольника ABC , а вершина R — на стороне AB . Точка Q — середина AC (т.к. BQ — биссектриса, а значит,

и медиана равнобедренного треугольника ABC) и $QR \parallel BC$, поэтому QR — средняя линия треугольника ABC . Следовательно, $QR = \frac{1}{2}BC = \frac{9}{2}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Рассмотрена хотя бы одна геометрическая конфигурация, для которой получено правильное значение искомой величины	2
Рассмотрена хотя бы одна геометрическая конфигурация, для которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	3

C5 Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение $|\cos x + 2\sin x + a| = a - 2\cos x - \sin x$ имеет хотя бы одно решение на промежутке $\left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$.

Ответ: $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$.

Раскрывая модуль, получаем:

$$\begin{cases} 2\cos x + \sin x - a \leq 0, \\ \cos x + 2\sin x + a = -2\cos x - \sin x + a, \\ \cos x + 2\sin x + a = 2\cos x + \sin x - a. \end{cases}$$

Решим уравнения, не обращая внимания на неравенство. Первое уравнение приводится к виду $\cos x + \sin x = 0$; $\operatorname{tg} x = -1$. На промежутке $\left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$ нет решений.

Второе уравнение приводится к виду

$$\begin{aligned} \cos x - \sin x &= 2a; \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\cos x - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin x &= a\sqrt{2}; \\ \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) &= -a\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Если $\pi < x \leq \frac{3\pi}{2}$, то

$$\frac{3\pi}{4} < x - \frac{\pi}{4} \leq \frac{5\pi}{4}; \quad -\frac{1}{2} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) < \frac{1}{2}.$$

Значит, уравнение имеет корень на этом промежутке, если и только если $-\frac{1}{2} < a \leq \frac{1}{2}$.

Докажем, что при найденных a неравенство $2\cos x + \sin x - a \leq 0$ верно.

$$(2\cos x + \sin x)^2 = 4\cos^2 x + \sin^2 x + 4\sin x \cos x = 1 + 3\cos^2 x + 4\sin x \cos x.$$

При $\pi < x \leq \frac{3\pi}{2}$ получаем: $(2\cos x + \sin x)^2 \geq 1$. Следовательно,

$$2\cos x + \sin x \leq -1, \text{ и поэтому } 2\cos x + \sin x - a \leq -1 - a < -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} < 0.$$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
Получен верный ответ, но он недостаточно обоснован или в обосновании содержатся неточности	3
Ход решения в целом верен, верно получена либо верхняя, либо нижняя граница множества решений, ответ неверен	2
Решение содержит верную геометрическую интерпретацию задачи или верный переход к равносильной системе без модулей, дальнейшие содержательные продвижения отсутствуют	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	4

C6 Каждый из группы учащихся сходил в кино или в театр, при этом возможно, что кто-то из них мог сходить и в кино, и в театр. Известно, что в театре мальчиков было не более $\frac{5}{13}$ от общего числа учащихся группы, посетивших

театр, а в кино мальчиков было не более $\frac{1}{3}$ от общего числа учащихся группы, посетивших кино.

а) Могло ли быть в группе 9 мальчиков, если дополнительно известно, что всего в группе было 18 учащихся?

б) Какое наибольшее количество мальчиков могло быть в группе, если дополнительно известно, что всего в группе было 18 учащихся?

в) Какую наименьшую долю могли составлять девочки от общего числа учащихся в группе без дополнительного условия пунктов а и б?

Ответ: а) да; б) 9; в) $\frac{8}{17}$.

а) Если группа состоит из 5 мальчиков, посетивших только театр, 4 мальчиков, посетивших только кино, и 9 девочек, сходящих и в театр, и в кино, то условие задачи выполнено. Значит, в группе из 18 учащихся могло быть 9 мальчиков.

б) Предположим, что мальчиков было 10 или больше. Тогда девочек было 8 или меньше. Театр посетили не более 5 мальчиков, поскольку если бы их было 6 или больше, то доля мальчиков в театре была бы не меньше $\frac{6}{6+8} = \frac{3}{7}$, что больше $\frac{5}{13}$. Аналогично, кино посетили не более 4 мальчиков, поскольку $\frac{5}{5+8} = \frac{5}{13} > \frac{1}{3}$, но тогда хотя бы один мальчик не посетил ни театра, ни кино, что противоречит условию.

В предыдущем пункте было показано, что в группе из 18 учащихся могло быть 9 мальчиков. Значит, наибольшее количество мальчиков в группе — 9.

в) Предположим, что некоторый мальчик сходил и в театр, и в кино. Если бы вместо него в группе присутствовали два мальчика, один из которых посетил только театр, а другой — только кино, то доля мальчиков и в театре, и в кино осталась бы прежней, а общая доля девочек стала бы меньше. Значит, для оценки наименьшей доли девочек в группе можно считать, что каждый мальчик сходил или только в театр, или только в кино.

Пусть в группе m_1 мальчиков, посетивших театр, m_2 мальчиков, посетивших кино, и d девочек. Оценим долю девочек в этой группе. Будем считать, что все девочки ходили и в театр, и в кино, поскольку их доля в группе от этого не изменится, а доля в театре и в кино не уменьшится.

По условию $\frac{m_1}{m_1+d} \leq \frac{5}{13}$, $\frac{m_2}{m_2+d} \leq \frac{1}{3}$, значит, $\frac{m_1}{d} \leq \frac{5}{8}$, $\frac{m_2}{d} \leq \frac{1}{2}$. Тогда

$\frac{m_1+m_2}{d} \leq \frac{9}{8}$, поэтому доля девочек в группе:

$$\frac{d}{m_1+m_2+d} = \frac{1}{\frac{m_1+m_2}{d}+1} \geq \frac{1}{\frac{9}{8}+1} = \frac{8}{17}.$$

Если группа состоит из 5 мальчиков, посетивших только театр, 4 мальчиков, посетивших только кино, и 8 девочек, сходящих и в театр, и в кино, то условие задачи выполнено, а доля девочек в группе равна $\frac{8}{17}$.

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: — обоснованное решение п. а); — обоснованное решение п. б); — искомая оценка в п. в); — пример в п. в), обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	4

ОТВЕТЫ

	Вариант 4	Вариант 5	Вариант 6	Вариант 7
B1	60	16	20	46
B2	6	8	7	4
B3	35	15	18	21
B4	960	1305	750	835
B5	-7	-5	-8	-4
B6	29	34	26	18
B7	-0,3	-0,5	-0,2	-0,9
B8	-0,25	-0,75	-1,25	-1,75
B9	315	104	77	152
B10	0,64	0,2	0,14	0,1
B11	96	144	384	864
B12	25	20	60	37,5
B13	70	80	45	10
B14	-1	-2	-2	-3