ФЕДЕРАЛЬНЫЙ ЦЕНТР ТЕСТИРОВАНИЯ

ФЕДЕРАЛЬНЫЙ ИНСТИТУТ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ

Вариант по математике № 4

Инструкция по выполнению работы

На выполнение экзаменационной работы по математике даётся 3 часа 55 минут (235 минут). Работа состоит из двух частей, включающих в себя 20 заданий.

Часть 1 содержит 14 заданий с кратким ответом (B1–B14) базового уровня по материалу курса математики. Ответом является целое число или конечная десятичная дробь.

Часть 2 содержит 6 более сложных заданий (C1–C6) по материалу курса математики. При их выполнении надо записать полное решение и ответ.

Все бланки заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой, капиллярной или перьевой ручки.

При выполнении заданий Вы можете пользоваться черновиком. Обращаем Ваше внимание, что записи в черновике не будут учитываться при оценивании работы.

Советуем выполнять задания в том порядке, в котором они даны. Для экономии времени пропускайте задание, которое не удаётся выполнить сразу, и переходите к следующему. Если после выполнения всей работы у Вас останется время, Вы сможете вернуться к пропущенным заданиям.

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

Желаем успеха!

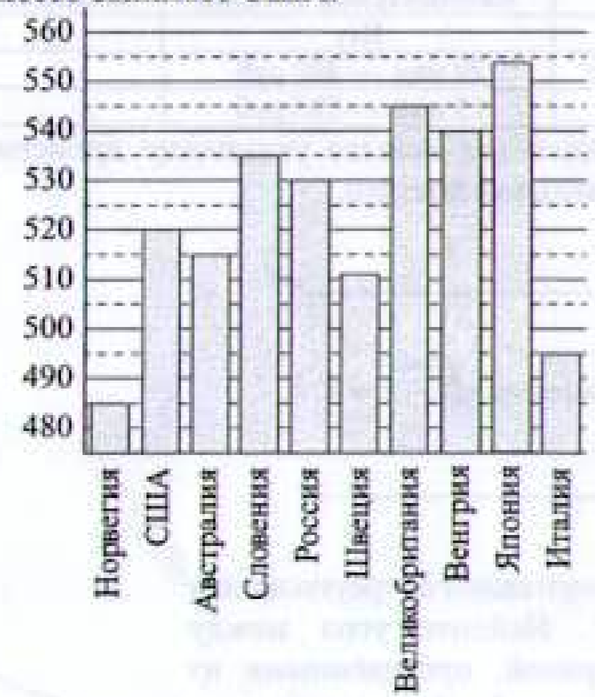
Часть 1

Ответом на задания B1–B14 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Ответ следует записать в бланк ответов № 1 справа от номера выполняемого задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак минус и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

B1 Летом килограмм клубники стоит 75 рублей. Маша купила 3 кг 200 г клубники. Сколько рублей сдачи она должна получить с 300 рублей?

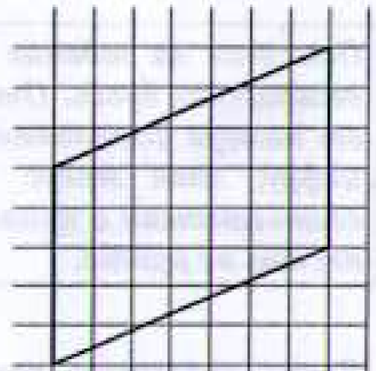
Ответ: ____________________.

B2 На диаграмме показан средний балл участников 10 стран в тестировании учащихся 8-го класса по естествознанию в 2007 году (по 1000-балльной шкале). Среди указанных стран третье место принадлежит Венгрии. Определите, какое место занимает США.



Ответ: ____________________.

B3 Найдите площадь параллелограмма, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см (см. рис.). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



Ответ: ________________________.

B4 В таблице даны тарифы на услуги трёх фирм такси. Предполагается поездка длительностью 60 минут. Нужно выбрать фирму, в которой заказ будет стоить дешевле всего. Сколько рублей будет стоить этот заказ?

Фирма такси	Подача машины	Продолжительность и стоимость минимальной поездки	Стоимость 1 минуты сверх продолжительности минимальной поездки (в руб.)
А	300 руб.	Нет	12
Б	Бесплатно	20 мин. — 400 руб.	18
В	150 руб.	15 мин. — 225 руб.	13

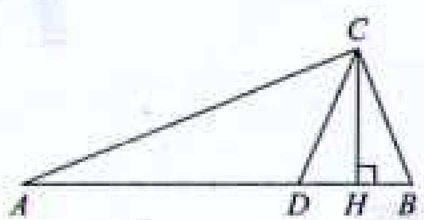
Если поездка продолжается меньше указанного времени, она оплачивается по стоимости минимальной поездки.

Ответ: ________________________.

B5 Найдите корень уравнения $\sqrt{9-x}=4$.

Ответ: ________________________.

B6 Острые углы прямоугольного треугольника равны 74° и 16°. Найдите угол между высотой и биссектрисой, проведёнными из вершины прямого угла. Ответ дайте в градусах.

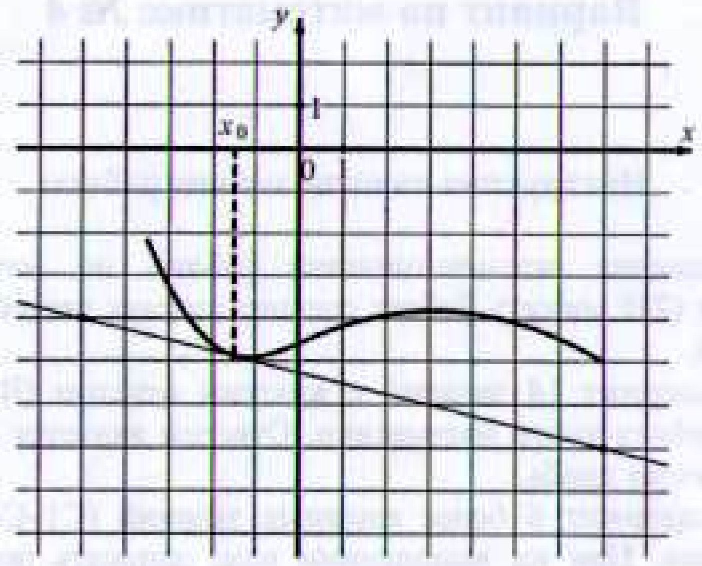


Ответ: ________________________.

B7 Найдите $\sin\alpha$, если $\cos\alpha=-\frac{\sqrt{91}}{10}$ и $\alpha\in\left(\pi;\ \frac{3}{2}\pi\right)$.

Ответ: ________________________.

B8 На рисунке изображены график функции $y=f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



Ответ: ________________________.

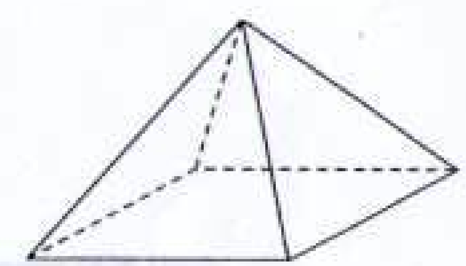
B9 В сосуд в виде конуса налита жидкость до $\frac{1}{4}$ высоты. Объём налитой жидкости 5 мл. Сколько миллилитров жидкости нужно долить, чтобы наполнить сосуд доверху?

Ответ: ________________________.

B10 В сборнике билетов по физике всего 25 билетов, в 16 из них встречается вопрос по термодинамике. Найдите вероятность того, что в случайно выбранном на экзамене билете школьнику достанется вопрос по термодинамике.

Ответ: ________________________.

B11 Найдите площадь поверхности правильной четырёхугольной пирамиды, стороны основания которой равны 6 и высота равна 4.



Ответ: ________________________.

ТЕСТ № 0020453104

0020453104

B12 При температуре 0 °C рельс имеет длину $l_0 = 13$ м. При возрастании температуры происходит тепловое расширение рельса и его длина, выраженная в метрах, меняется по закону $l(t) = l_0(1 + \alpha \cdot t)$, где $\alpha = 1{,}2 \cdot 10^{-5} (°C)^{-1}$ — коэффициент теплового расширения, t — температура (в градусах Цельсия). При какой температуре рельс удлинится на 3,9 мм? Ответ выразите в градусах Цельсия.

Ответ: ______________________________.

B13 Смешав 43-процентный и 47-процентный растворы кислоты и добавив 10 кг чистой воды, получили 41-процентный раствор кислоты. Если бы вместо 10 кг воды добавили 10 кг 50-процентного раствора той же кислоты, то получили бы 45-процентный раствор кислоты. Сколько килограммов 43-процентного раствора использовали для получения смеси?

Ответ: ______________________________.

B14 Найдите наибольшее значение функции $y = \log_{\frac{1}{2}}(x^2 + 4x + 6)$.

Ответ: ______________________________.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания С1–С6 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (С1, С2 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ.

C1 а) Решите уравнение $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + 2x\right) = \sqrt{3}\cos x$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $[-4\pi; -3\pi]$.

C2 В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с основанием ABC проведено сечение через середины рёбер AB и BC и вершину S. Найдите площадь этого сечения, если все рёбра пирамиды равны 8.

C3 Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \log_{5-x}\left(x^2 - 6x + 36\right) \le \log_{5-x} 29, \\ \dfrac{x^2 - 6x + 6}{x - 5} \le \dfrac{x}{2}. \end{cases}$$

C4 Две стороны треугольника равны 4 и 10, косинус угла между ними равен $\frac{1}{5}$.

В треугольник вписан ромб, имеющий с треугольником общий угол (вершина ромба, противоположная вершине этого угла, лежит на третьей стороне треугольника). Найдите сторону ромба.

C5 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $|\cos x + 2\sin x - a| = 2\cos x + \sin x + a$ имеет хотя бы одно решение на промежутке $\left(0; \frac{\pi}{2}\right]$.

C6 Каждый из группы учащихся сходил в кино или в театр, при этом возможно, что кто-то из них мог сходить и в кино, и в театр. Известно, что в театре мальчиков было не более $\frac{4}{13}$ от общего числа учащихся группы, посетивших театр, а в кино мальчиков было не более $\frac{2}{5}$ от общего числа учащихся группы, посетивших кино.

а) Могло ли быть в группе 10 мальчиков, если дополнительно известно, что всего в группе было 20 учащихся?

б) Какое наибольшее количество мальчиков могло быть в группе, если дополнительно известно, что всего в группе было 20 учащихся?

в) Какую наименьшую долю могли составлять девочки от общего числа учащихся в группе без дополнительного условия пунктов *а* и *б*?

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

C1

а) Решите уравнение $\cos\left(\frac{3\pi}{2}+2x\right)=\sqrt{3}\cos x$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-4\pi;\, -3\pi\right]$.

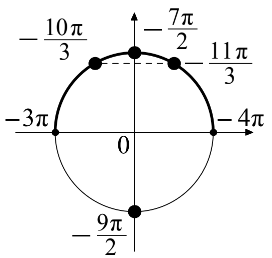
Ответ: а) $x=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; $x=\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; $x=\frac{2\pi}{3}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$;

б) $-\frac{11\pi}{3}$; $-\frac{7\pi}{2}$; $-\frac{10\pi}{3}$.

а) $\cos\left(\frac{3\pi}{2}+2x\right)=\sin 2x$, $\sin 2x=2\sin x\cos x$. Поэтому уравнение можно переписать в виде $2\sin x\cos x-\sqrt{3}\cos x=0$, откуда $2\cos x\left(\sin x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=0$.

Значит, $\cos x=0$, откуда $x=\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$, или $\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$, откуда $x=\frac{\pi}{3}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; $x=\frac{2\pi}{3}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$.

б) Отберём с помощью единичной окружности корни уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-4\pi;\, -3\pi\right]$: $x=-\frac{11\pi}{3}$; $x=-\frac{7\pi}{2}$; $x=-\frac{10\pi}{3}$.



Замечание. Отбор корней может быть обоснован и любым другим способом: с помощью оценок, графика, решения двойных неравенств и т.п.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в п. а) и в п. б)	2
Обоснованно получен верный ответ в п. а), но обоснование отбора корней в п. б) не приведено или задача в п. а) обоснованно сведена к исследованию простейших тригонометрических уравнений без предъявления верного ответа, а в п. б) приведен обоснованный отбор корней	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

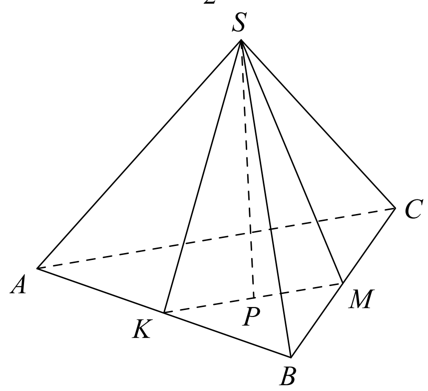
C2

В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с основанием ABC проведено сечение через середины рёбер AB и BC и вершину S. Найдите площадь этого сечения, если все рёбра пирамиды равны 8.

Ответ: $4\sqrt{11}$.

Сечением является равнобедренный треугольник SKM, причём его основание KM — средняя линия треугольника ABC.

$$KM=\frac{1}{2}AC=4.$$



SM — высота равностороннего треугольника SCB. $SM=4\sqrt{3}$. Пусть P — середина MK. Тогда высота SP треугольника SKM равна

$$\sqrt{SM^2-MP^2}=\sqrt{48-4}=2\sqrt{11}.$$

Площадь сечения равна

$$SP\cdot MP=2\sqrt{11}\cdot 2=4\sqrt{11}.$$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит обоснованный переход к планиметрической задаче, но получен неверный ответ или решение не закончено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

C3 Решите систему неравенств

$$\begin{cases}\log_{5-x}\left(x^2-6x+36\right)\le\log_{5-x}29,\\ \dfrac{x^2-6x+6}{x-5}\le\dfrac{x}{2}.\end{cases}$$

Ответ: $\left[3-\sqrt{2};\ 3\right]$, $\left[3+\sqrt{2};\ 5\right)$.

Решим первое неравенство. При $5-x>1$ получаем:

$$0<x^2-6x+36\le 29;\ x^2-6x+7\le 0, \text{ откуда } 3-\sqrt{2}\le x\le 3+\sqrt{2}.$$

Учитывая условие $x<4$, получаем: $3-\sqrt{2}\le x<4$.

При $0<5-x<1$:

$$x^2-6x+36\ge 29, \text{ откуда } x\le 3-\sqrt{2} \text{ или } x\ge 3+\sqrt{2}.$$

Учитывая условие $4<x<5$, получаем, что в этом случае $3+\sqrt{2}\le x<5$.

Объединяя промежутки, получаем решение первого неравенства: $3-\sqrt{2}\le x<4$ или $3+\sqrt{2}\le x<5$.

Решим второе неравенство:

$$\frac{2x^2-12x+12-x^2+5x}{x-5}\le 0;\ \frac{x^2-7x+12}{x-5}\le 0;\ \frac{(x-3)(x-4)}{x-5}\le 0,$$

откуда $x\le 3$ или $4\le x<5$.

Учитывая, что $1<3-\sqrt{2}<3$ и $4<3+\sqrt{2}<5$, получаем решение системы: $3-\sqrt{2}\le x\le 3$ или $3+\sqrt{2}\le x<5$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Обоснованно получены верные ответы в обоих неравенствах	2
Обоснованно получен верный ответ в одном неравенстве системы неравенств	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

C4 Две стороны треугольника равны 4 и 10, косинус угла между ними равен $\dfrac{1}{5}$. В треугольник вписан ромб, имеющий с треугольником общий угол (вершина ромба, противоположная вершине этого угла, лежит на третьей стороне треугольника). Найдите сторону ромба.

Ответ: $\dfrac{20}{7}$ или 5.

Пусть в треугольнике ABC известно, что $AB=10$, $AC=4$, $\angle BAC=\alpha$, $\cos\alpha=\dfrac{1}{5}$. По теореме косинусов

$$BC=\sqrt{AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cos\alpha}=\sqrt{100+16-2\cdot 10\cdot 4\cdot\frac{1}{5}}=10,$$

значит, треугольник ABC — равнобедренный, $BC=AB=10$.

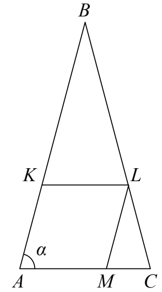


Рис. 1

Рассмотрим случай, когда общий угол треугольника и ромба — это угол при вершине A (рис. 1). Пусть $AKLM$ — ромб со стороной x, причём вершина L ромба лежит на стороне BC треугольника ABC, а вершина M — на стороне AC. Треугольники KBL и ABC подобны, т.к. $KL\parallel AC$, значит, $\dfrac{KL}{AC}=\dfrac{BK}{AB}$, или $\dfrac{x}{4}=\dfrac{10-x}{10}$. Из этого уравнения находим, что $x=\dfrac{20}{7}$.

В случае, когда C — общий угол ромба и треугольника, получим тот же результат.

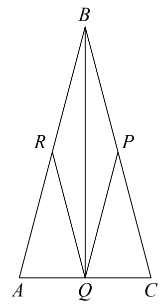


Рис. 2

Предположим теперь, что общий угол треугольника и ромба — это угол при вершине B (рис. 2). Пусть $BPQR$ — ромб, причём вершина Q ромба лежит на основании AC треугольника ABC, а вершина R — на стороне AB. Точка Q — середина AC (т.к. BQ — биссектриса, а значит, и медиана равнобедренного треугольника ABC) и $QR \parallel BC$, поэтому QR — средняя линия треугольника ABC. Следовательно, $QR = \frac{1}{2}BC = 5$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Рассмотрена хотя бы одна геометрическая конфигурация, для которой получено правильное значение искомой величины	2
Рассмотрена хотя бы одна геометрическая конфигурация, для которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

C5 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $|\cos x + 2\sin x - a| = 2\cos x + \sin x + a$ имеет хотя бы одно решение на промежутке $\left(0;\ \frac{\pi}{2}\right]$.

Ответ: $\left(-\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\right]$.

Раскрывая модуль, получаем:

$$\begin{cases} 2\cos x + \sin x + a \ge 0, \\ \left[\begin{array}{l} \cos x + 2\sin x - a = -2\cos x - \sin x - a \\ \cos x + 2\sin x - a = 2\cos x + \sin x + a. \end{array}\right. \end{cases}$$

Решим уравнения, не обращая внимания на неравенство. Первое уравнение приводится к виду $\cos x + \sin x = 0$; $\operatorname{tg} x = -1$. На промежутке $\left(0;\ \frac{\pi}{2}\right]$ решений нет.

Второе уравнение приводится к виду

$$\sin x - \cos x = 2a;$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x - \frac{1}{\sqrt{2}}\cos x = a\sqrt{2};$$

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = a\sqrt{2}.$$

Если $0 < x \le \frac{\pi}{2}$, то

$$-\frac{\pi}{4} < x - \frac{\pi}{4} \le \frac{\pi}{4}; \qquad -\frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \le \frac{1}{2}.$$

Значит, уравнение имеет корень на этом промежутке, если и только если $-\frac{1}{2} < a \le \frac{1}{2}$.

Докажем, что при найденных значениях a неравенство $2\cos x + \sin x + a \ge 0$ выполняется.

$$(2\cos x + \sin x)^2 = 4\cos^2 x + \sin^2 x + 4\sin x\cos x = 1 + 3\cos^2 x + 4\sin x\cos x.$$

При $0 < x \le \frac{\pi}{2}$ получаем: $(2\cos x + \sin x)^2 \ge 1$. Поэтому

$$2\cos x + \sin x \ge 1;\ 2\cos x + \sin x + a > 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} > 0.$$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
Получен верный ответ, но он недостаточно обоснован или в обосновании содержатся неточности	3
Ход решения в целом верен, верно получена либо верхняя, либо нижняя граница множества решений, ответ неверен	2
Решение содержит верную геометрическую интерпретацию задачи или верный переход к равносильной системе без модулей, дальнейшие содержательные продвижения отсутствуют	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

C6 Каждый из группы учащихся сходил в кино или в театр, при этом возможно, что кто-то из них мог сходить и в кино, и в театр. Известно, что в театре мальчиков было не более $\frac{4}{13}$ от общего числа учащихся группы, посетивших театр, а в кино мальчиков было не более $\frac{2}{5}$ от общего числа учащихся группы, посетивших кино.

а) Могло ли быть в группе 10 мальчиков, если дополнительно известно, что всего в группе было 20 учащихся?

б) Какое наибольшее количество мальчиков могло быть в группе, если дополнительно известно, что всего в группе было 20 учащихся?

в) Какую наименьшую долю могли составлять девочки от общего числа учащихся в группе без дополнительного условия пунктов *а* и *б*?

Ответ: а) да; б) 10; в) $\frac{9}{19}$.

а) Если группа состоит из 4 мальчиков, посетивших только театр, 6 мальчиков, посетивших только кино, и 10 девочек, сходивших и в театр, и в кино, то условие задачи выполнено. Значит, в группе из 20 учащихся могло быть 10 мальчиков.

б) Предположим, что мальчиков было 11 или больше. Тогда девочек было 9 или меньше. Театр посетили не более 4 мальчиков, поскольку если бы их было 5 или больше, то доля мальчиков в театре была бы не меньше $\frac{5}{5+9}=\frac{5}{14}$, что больше $\frac{4}{13}$. Аналогично, кино посетили не более 6 мальчиков, поскольку $\frac{7}{7+9}=\frac{7}{16}>\frac{2}{5}$, но тогда хотя бы один мальчик не посетил ни театра, ни кино, что противоречит условию.

В предыдущем пункте было показано, что в группе из 20 учащихся могло быть 10 мальчиков. Значит, наибольшее количество мальчиков в группе — 10.

в) Предположим, что некоторый мальчик сходил и в театр, и в кино. Если бы вместо него в группе присутствовало два мальчика, один из которых посетил только театр, а другой — только кино, то доля мальчиков и в театре, и в кино осталась бы прежней, а общая доля девочек стала бы меньше. Значит, для оценки наименьшей доли девочек в группе можно считать, что каждый мальчик сходил или только в театр, или только в кино.

Пусть в группе m_1 мальчиков, посетивших театр, m_2 мальчиков, посетивших кино, и d девочек. Оценим долю девочек в этой группе. Будем считать, что все девочки ходили и в театр, и в кино, поскольку их доля в группе от этого не изменится, а доля в театре и в кино не уменьшится.

По условию $\frac{m_1}{m_1+d}\le\frac{4}{13}$, $\frac{m_2}{m_2+d}\le\frac{2}{5}$, значит, $\frac{m_1}{d}\le\frac{4}{9}$, $\frac{m_2}{d}\le\frac{2}{3}$. Тогда $\frac{m_1+m_2}{d}\le\frac{10}{9}$, поэтому доля девочек в группе:

$$\frac{d}{m_1+m_2+d}=\frac{1}{\frac{m_1+m_2}{d}+1}\ge\frac{1}{\frac{10}{9}+1}=\frac{9}{19}.$$

Если группа состоит из 4 мальчиков, посетивших только театр, 6 мальчиков, посетивших только кино, и 9 девочек, сходивших и в театр, и в кино, то условие задачи выполнено, а доля девочек в группе равна $\frac{9}{19}$.

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: — обоснованное решение п. а); — обоснованное решение п. б); — искомая оценка в п. в); — пример в п. в), обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Ответы

	Вариант 4	Вариант 5	Вариант 6	Вариант 7
B1	60	16	20	46
B2	6	8	7	4
B3	35	15	18	21
B4	960	1305	750	835
B5	-7	-5	-8	-4
B6	29	34	26	18
B7	-0,3	-0,5	-0,2	-0,9
B8	-0,25	-0,75	-1,25	-1,75
B9	315	104	77	152
B10	0,64	0,2	0,14	0,1
B11	96	144	384	864
B12	25	20	60	37,5
B13	70	80	45	10
B14	-1	-2	-2	-3