Тренировочный вариант
по МАТЕМАТИКЕ

№ 77101

Инструкция по выполнению работы

На выполнение экзаменационной работы по математике даётся 3 часа 55 минут (235 минут). Работа состоит из двух частей, включающих в себя 20 заданий.

Часть 1 содержит 14 заданий с кратким ответом (B1–B14) базового уровня по материалу курса математики. Ответом является целое число или конечная десятичная дробь.

Часть 2 содержит 6 более сложных заданий (C1–C6) по материалу курса математики. При их выполнении надо записать полное решение и ответ.

Все бланки ЕГЭ заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой, капиллярной или перьевой ручки.

При выполнении заданий Вы можете пользоваться черновиком. Обращаем Ваше внимание, что записи в черновике не будут учитываться при оценивании работы.

Советуем выполнять задания в том порядке, в котором они даны. Для экономии времени пропускайте задание, которое не удаётся выполнить сразу, и переходите к следующему. Если после выполнения всей работы у Вас останется время, Вы сможете вернуться к пропущенным заданиям.

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

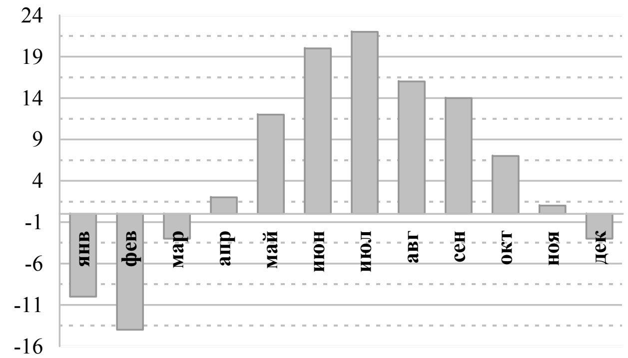
Желаем успеха!

Часть 1

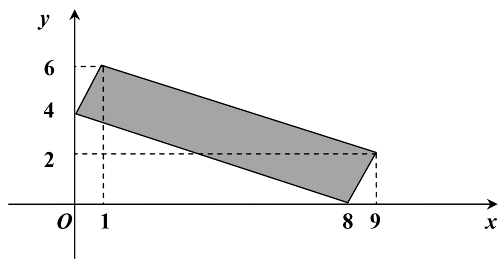
Ответом на задания B1–B14 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Ответ следует записать в бланк ответов № 1 справа от номера выполняемого задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак минус и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

B1 Оптовая цена учебника 170 рублей. Розничная цена на 20% выше оптовой. Какое наибольшее число таких учебников можно купить по розничной цене на 7000 рублей?

B2 На диаграмме показана среднемесячная температура воздуха в Москве за каждый месяц 2009 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Определите по диаграмме, сколько было месяцев, когда среднемесячная температура превышала 19 градусов Цельсия



B3 Найдите площадь четырехугольника, изображённого на рисунке.



B4 При строительстве сельского дома можно использовать один из двух типов фундамента: каменный или бетонный. Для каменного фундамента необходимо 9 тонн природного камня и 9 мешков цемента. Для бетонного фундамента необходимо 7 тонн щебня и 50 мешков цемента. Тонна камня стоит 1 600 рублей, щебень стоит 780 рублей за тонну, а мешок цемента стоит 230 рублей. Сколько рублей будет стоить материал для фундамента, если выбрать наиболее дешевый вариант?

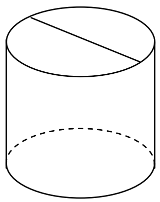
B5 Найдите корень уравнения: $\sqrt{-72-17x}=-x$. Если уравнение имеет более одного корня, укажите наименьший из них.

B6 В треугольнике ABC $AC=BC$, высота CH равна 24, $AB=14$. Найдите $\cos A$.

B7 Найдите значение выражения $\dfrac{a^2b^{-6}}{(4a)^3b^{-2}}\cdot\dfrac{16}{a^{-1}b^{-4}}$.

B8 Прямая $y=7x-5$ параллельна касательной к графику функции $y=x^2+6x-8$. Найдите абсциссу точки касания.

B9 Площадь боковой поверхности цилиндра равна 15π, а диаметр основания равен 5. Найдите высоту цилиндра.



B10 Фабрика выпускает сумки. В среднем на 100 качественных сумок приходится восемь сумок со скрытыми дефектами. Найдите вероятность того, что купленная сумка окажется качественной. Результат округлите до сотых.

B11 Найдите объем правильной шестиугольной призмы, стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны $\sqrt{3}$.

B12 Находящийся в воде водолазный колокол, содержащий $\upsilon=2$ моля воздуха при давлении $p_1=1{,}5$ атмосферы, медленно опускают на дно водоема. При этом происходит изотермическое сжатие воздуха. Работа, совершаемая водой при сжатии воздуха, определяется выражением $A=\alpha\upsilon T\log_2\dfrac{p_1}{p_2}$ (Дж), где $\alpha=5{,}75$ – постоянная, $T=300$ – температура воздуха, p_1 (атм) – начальное давление, а p_2 (атм) – конечное давление воздуха в колоколе. До какого наибольшего давления p_2 можно сжать воздух в колоколе, если при сжатии воздуха совершается работа не более чем 6900 Дж? Ответ приведите в атмосферах.

B13 Заказ на 156 деталей первый рабочий выполняет на 1 час быстрее, чем второй. Сколько деталей в час делает первый рабочий, если известно, что он за час делает на 1 деталь больше?

B14 Найдите наибольшее значение функции $y=12\cos x+6\sqrt{3}x-2\sqrt{3}\pi+6$ на отрезке $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов №1.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания С1–С6 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (С1, С2 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ.

С1 а) Решите уравнение $\left|\cos x + \sin x\right| = \sqrt{2}\sin 2x$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$.

С2 В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$, боковые ребра равны 2, а стороны основания — 1, найдите косинус угла между прямой AC и плоскостью SAF.

С3 Решите неравенство

$$\log_{|x|}\left(\sqrt{5-x}+4\right) \geq 2\cdot\log_{x^2}\left(8-2x\right).$$

С4 Точки A, B и C лежат на одной прямой. Отрезок AB является диаметром первой окружности, а отрезок BC — диаметром второй окружности. Прямая, проходящая через точку A, пересекает первую окружность в точке D и касается второй окружности в точке E, при этом BD = 9, BE = 12. Найдите радиусы окружностей.

С5 Найдите все значения a, при которых система неравенств

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - a^2 \leq 6x - 4y - 13, \\ x^2 + y^2 - 4a^2 \leq 8y - 10x + 4a - 40 \end{cases}$$

имеет ровно одно решение.

С6 В течение четверти учитель по математике ставил детям оценки «1», «2», «3», «4» и «5». Среднее арифметическое Вовочки оказалось равным в точности 3,5. И тогда, по предложению Вовочки, учитель заменил одну его оценку «4» парой оценок «3» и «5». Найдите наибольшее возможное её значение после такой замены:

а) одной оценки «4»;

б) всех его оценок «4»?

Ответы к заданиям части 1

Каждое правильно выполненное задание части 1 оценивается 1 баллом. Задания части 1 считаются выполненными верно, если экзаменуемый дал верный ответ в виде целого числа или конечной десятичной дроби.

Задание	Ответ
B1	34
B2	2
B3	20
B4	16470
B5	-9
B6	0,28
B7	0,25
B8	0,5
B9	3
B10	0,93
B11	4,5
B12	6
B13	13
B14	12

Ответы к заданиям части 2

Задание	Ответ
C1	а) $\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; б) $\frac{9\pi}{4}$
C2	$\varphi=\arccos\frac{1}{\sqrt{5}}$
C3	$(-1;0)\cup(0;1)\cup(1;4)$
C4	$R_1=36$, $R_2=8$
C5	$a=-\frac{11}{3}$ или $a=3$
C6	а) $3\frac{2}{3}$; б) $3\frac{8}{11}$

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

C1 а) Решите уравнение $|\cos x+\sin x|=\sqrt{2}\sin 2x$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2};\frac{5\pi}{2}\right]$.

Решение.

а) $|\cos x+\sin x|=\sqrt{2}\sin 2x \Leftrightarrow \begin{cases}(\cos x+\sin x)^2=2\sin^2 2x,\\ \sin 2x\ge 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}\sin 2x=1,\\ \sin 2x=-\frac{1}{2},\end{array}\right.\\ \sin 2x\ge 0\end{cases} \Leftrightarrow$

$\sin 2x=1,$ откуда $x=\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$.

б) С помощью решения неравенств отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2};\frac{5\pi}{2}\right]$.

$$\frac{3\pi}{2}\le\frac{\pi}{4}+\pi n\le\frac{5\pi}{2}\ /:\pi$$

$$\frac{3}{2}\le\frac{1}{4}+n\le\frac{5}{2}$$

$$\frac{3}{2}-\frac{1}{4}\le n\le\frac{5}{2}-\frac{1}{4}$$

$$\frac{5}{4}\le n\le\frac{9}{4}$$

$n=2$, **т.к.** $n\in\mathbb{Z}$. Отсюда получаем — $\frac{\pi}{4}+\pi n=\frac{\pi}{4}+2\pi=\frac{\pi+8\pi}{4}=\frac{9\pi}{4}$.

Получим числа $\frac{9\pi}{4}$.

Замечание. Отбор корней может быть обоснован и любым другим способом: с помощью графика, числовой окружности и т.п.

Ответ: а) $\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; б) $\frac{9\pi}{4}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или в пункте *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

C2 В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$, боковые ребра равны 2, а стороны основания — 1, найдите косинус угла между прямой AC и плоскостью SAF.

Решение №1.

Удостоверимся, что $\angle FAC$ равен 90°.

Рассмотрим $\triangle ABC$: $AB=BC$; $\angle B=120°$ ($\alpha=\frac{(n-2)\cdot 180°}{n}$), отсюда следует, что $\angle A=\angle C=30°$.

$\angle FAC=\angle FAB-\angle CAB=90°$.

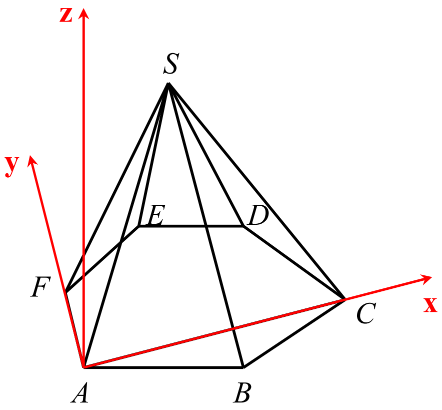


Рис. 1

Введем систему координат* (Рис. 1).

Найдём AC с помощью теоремы косинусов:

$$AC^2=AB^2-2AB\cdot BC\cdot\cos 120°+BC^2$$

$$AC^2=1-2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+1$$

$$AC^2=3$$

$$AC=\sqrt{3}.$$

$A=(0;0;0)$; $C=(0;\sqrt{3};0)$. $\overline{AC}=\{0;\sqrt{3};0\}$.

Напишем уравнение плоскости SAF: $S=\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};\sqrt{3}\right)$; $A=(0;0;0)$; $F=(1;0;0)$.

$$\begin{vmatrix} x-\frac{1}{2} & y-\frac{\sqrt{3}}{2} & z-\sqrt{3}\\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\sqrt{3}\\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\sqrt{3}\end{vmatrix}=0.$$

$$A=\begin{vmatrix}-\frac{\sqrt{3}}{2} & -\sqrt{3}\\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\sqrt{3}\end{vmatrix}=0;\qquad B=-\begin{vmatrix}-\frac{1}{2} & -\sqrt{3}\\ \frac{1}{2} & -\sqrt{3}\end{vmatrix}=-\left|\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right|=-\sqrt{3};$$

$$C=\begin{vmatrix}-\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\end{vmatrix}=\left|\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}\right|=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

уравнение плоскости *SAF* $0x-\sqrt{3}y+\frac{\sqrt{3}}{2}z=0$. А значит нормаль к плоскости будет равна — $\vec{n}=\left\{0;-\sqrt{3};\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$

$$\sin\left(\widehat{\overrightarrow{AC};SAF}\right)=\frac{|0-3+0|}{\sqrt{3+\frac{3}{4}}\cdot\sqrt{3}}=\frac{3}{\sqrt{45}}=\frac{2}{\sqrt{5}}.$$

$$\cos\left(\widehat{\overrightarrow{AC};SAF}\right)=\sqrt{1-\sin^2\left(\widehat{\overrightarrow{AC};SAF}\right)}=\sqrt{1-\frac{4}{5}}=\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Решение № 2.

Удостоверимся, что $\angle FAC$ равен $90°$.

Рассмотрим $\triangle ABC$: $AB=BC$; $\angle B=120°$ ($\alpha=\frac{(n-2)\cdot180°}{n}$), отсюда следует, что $\angle A=\angle C=30°$.

$\angle FAC=\angle FAB-\angle CAB=90°$.

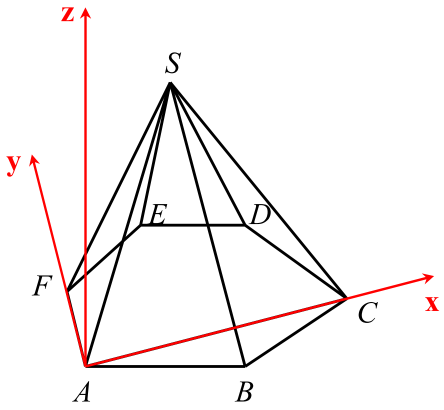


Рис. 1

Введем систему координат* (Рис. 1).

Найдём AC с помощью теоремы косинусов:

$AC^2=AB^2-2AB\cdot BC\cdot\cos120°+BC^2$

$AC^2=1-2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+1$

$AC^2=3$

$AC=\sqrt{3}$.

$A=(0;0;0)$; $C=\left(0;\sqrt{3};0\right)$.

$(1)\overrightarrow{AC}=\left\{0;\sqrt{3};0\right\}$.

Найдём нормаль к плоскости: $\vec{n}=\{a;-b;c\}$ — вектор нормали перпендикулярный к плоскости *SAF*.

$$\begin{cases}a=0,\\ \frac{1}{2}a+\frac{\sqrt{3}}{2}b+\sqrt{3}c=0.\end{cases}$$

Она будет равна — $\vec{n}=\{0;-2;1\}$

$$(1)\overrightarrow{AC}=\left\{0;\sqrt{3};0\right\}.$$

$$\sin\left(\widehat{\overrightarrow{AC};\vec{n}}\right)=\frac{\left|0-2\sqrt{3}+0\right|}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{4+1}}=\frac{2\cancel{\sqrt{3}}}{\cancel{\sqrt{3}}\cdot\sqrt{5}}=\frac{2}{\sqrt{5}}.$$

$$\cos\left(\widehat{\overrightarrow{AC};\vec{n}}\right)=\sqrt{1-\sin^2\left(\widehat{\overrightarrow{AC};\vec{n}}\right)}=\sqrt{1-\frac{4}{5}}=\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Ответ: $\varphi=\arccos\frac{1}{\sqrt{5}}$.

* Ввести систему координат мы бы могли где угодно, можно было и через высоту — дольше бы шли к ответу, но главное не забывать, что оси ***x,y,z*** перпендикулярны между собой.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит верный ход рассуждений, найден искомый угол, но ответ неверен из-за арифметической ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

C3 Решите неравенство

$$\log_{|x|}\left(\sqrt{5-x}+4\right)\ge2\cdot\log_{x^2}(8-2x).$$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases}5-x\ge0,\\ 8-2x>0,\\ x\ne0,\\ |x|\ne1.\end{cases}$

Исходное неравенство равносильно: ОДЗ: $\begin{cases}x<4,\\ x\ne0,\\ |x|\ne1\end{cases}\Leftrightarrow$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}|x|>1,\\ \left(\sqrt{5-x}+4\right)\ge(8-2x);\end{cases}\\ \begin{cases}|x|<1,\\ \left(\sqrt{5-x}+4\right)\le(8-2x)\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}|x|>1,\\ \left(\sqrt{5-x}\right)\ge(4-2x);\end{cases}\\ \begin{cases}|x|<1,\\ \left(\sqrt{5-x}\right)\le(4-2x).\end{cases}\end{array}\right.$$

Сначала решим систему

$$\begin{cases}|x|>1,\\ \left(\sqrt{5-x}\right)\ge 4-2x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}|x|>1,\\ \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\le 2,\\ 4x^2-15x+11\le 0;\end{cases}\\ \begin{cases}x>2,\\ 5-x\ge 0\end{cases}\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\in(1;2],\\ x\in(2;5],\end{array}\right.$$

учитывая ОДЗ, получим $x\in(1;4)$.

Решим теперь вторую систему

$$\begin{cases}|x|<1,\\ \left(\sqrt{5-x}\right)\le 4-2x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}|x|<1,\\ x\le 2,\\ 5-x\ge 0,\\ 4x^2-15x+11\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow x\in(-1;1).$$

Учитывая ОДЗ, получаем $x\in(-1;0)\cup(0;1)$.

Объединяя решения обеих систем, получим ответ: $x\in(-1;0)\cup(0;1)\cup(1;4)$.

Ответ: $(-1;0)\cup(0;1)\cup(1;4)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Обоснованно получены верные ответы в обоих неравенствах системы неравенств	2
Обоснованно получен верный ответ в одном неравенстве системы неравенств	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

C4 Точки A, B и C лежат на одной прямой. Отрезок AB является диаметром первой окружности, а отрезок BC — диаметром второй окружности. Прямая, проходящая через точку A, пересекает первую окружность в точке D и касается второй окружности в точке E, при этом $BD=9$, $BE=12$. Найдите радиусы окружностей.

Решение.

Пусть R_1 и R_2 — радиусы первой и второй окружностей соответственно, точка O — центр второй окружности. Возможны три случая расположения точек A, B, C на одной прямой.

1) Точка A лежит между точками B и C. Тогда A находится внутри второй окружности и не существует прямой, проходящей через A и касающейся второй окружности.

2) Точка B лежит между точками A и C (Рис. 1).

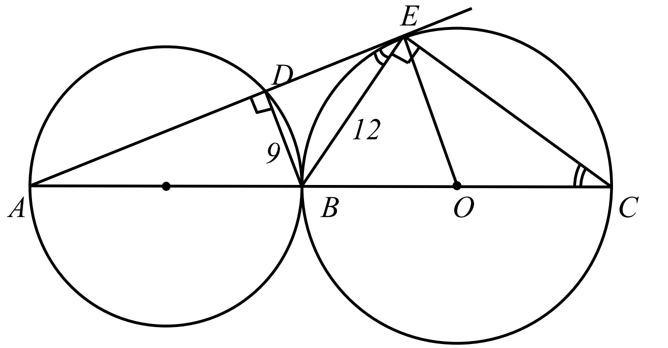


Рис. 1

Тогда $\angle BDE=\angle BEC=90°$, $\angle DEB=\angle BCE$ (так как угол между касательной и хордой равен вписанному углу, опирающемуся на ту же дугу). Следовательно, треугольники BDE и BEC подобны, и

$$\frac{BD}{BE}=\frac{BE}{BC}\Leftrightarrow\frac{9}{12}=\frac{12}{2R_2}\Leftrightarrow R_2=8.$$

Так как $BD<OE$, а $9>8$, то данный случай невозможен.

3) Точка C лежит между точками A и B (Рис. 2).

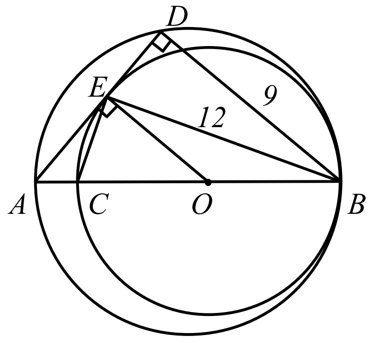


Рис. 2

Аналогично, как и во втором случае, находим $R_2=8$. Далее, прямоугольные треугольники AEO и ADB подобны (у них общий острый угол). Имеем:

$$\frac{AO}{AB}=\frac{EO}{DB}\Leftrightarrow\frac{2R_1-R_2}{2R_1}=\frac{2R_2}{9}\Leftrightarrow\frac{2R_1-8}{2R_1}=\frac{8}{9},$$

откуда $R_1=36$.

Ответ: $R_1=36$, $R_2=8$.

Содержание критерия	Баллы
Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации и получен правильный ответ	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная конфигурация, в которой получено правильное значение искомой величины	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, в которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

C5 Найдите все значения a, при которых система неравенств

$$\begin{cases} x^2+y^2-a^2\le 6x-4y-13, \\ x^2+y^2-4a^2\le 8y-10x+4a-40 \end{cases}$$

имеет ровно одно решение.

Решение.

Первое неравенство системы задаёт круг с центром в точке $A(3;-2)$ радиуса $|a|$. Второе неравенство задаёт круг с центром $B(-5;4)$ радиуса $|2a+1|$. Границы кругов включаются; при $a=0$ и $a=-\frac{1}{2}$ один из кругов вырождается в точку.

Система неравенств имеет единственное решение, когда круги касаются внешним образом, то есть, когда сумма радиусов равна расстоянию между центрами $AB=\sqrt{8^2+(-6)^2}=10$. Получаем уравнение $|a|+|2a+1|=10$, решая которое, находим, что $a=-\frac{11}{3}$ или $a=3$.

Ответ: $a=-\frac{11}{3}$ или $a=3$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a, отличающееся от искомого конечным числом точек	3
С помощью верного рассуждения получены все граничные точки искомого множества значений a	2
Верно получена хотя бы одна граничная точка искомого множества значений a	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

C6 В течение четверти учитель по математике ставил детям оценки «1», «2», «3», «4» и «5». Среднее арифметическое Вовочки оказалось равным в точности 3,5. И тогда, по предложению Вовочки, учитель заменил одну его оценку «4» парой оценок «3» и «5». Найдите наибольшее возможное её значение после такой замены:

а) одной оценки «4»;

б) всех его оценок «4»?

Решение.

а) Пусть исходное число оценок равно n и среднее арифметическое их значение равно 3,5. Тогда $n>1$ (иначе единственная исходная оценка оказалась бы равной «3,5») и после замены одной оценки «4» парой оценок «3» и «5» новое среднее значение всех оценок равно $f(n)=\frac{3{,}5n+4}{n+1}=3{,}5+\frac{0{,}5}{n+1}>3{,}5,$ причём $f(n)\le f(2)=3\frac{2}{3}$. Последнее значение достигается при $n=2$, когда исходные оценки — это «3» и «4»: тогда старое среднее значение оценок равно $\frac{3+4}{3}=3{,}5$, а новое — $\frac{3+3+5}{3}=3\frac{2}{3}$.

б) Пусть среди исходных оценок доля оценок, отличных от «4», равна x, а среднее их значение равно $a\ge 1$. Тогда общее среднее значение всех оценок равно $ax+4(1-x)=3{,}5\Rightarrow x=\frac{0{,}5}{4-a}>0,$ а после замены каждой оценки «4» парой оценок «3» и «5» новое среднее значение всех оценок равно

$$\frac{3{,}5\cdot 1+4(1-x)}{1+(1-x)}=\frac{7{,}5-4x}{2-x}=\frac{7{,}5-4\cdot\frac{0{,}5}{4-a}}{2-\frac{0{,}5}{4-a}}=\frac{28-7{,}5a}{7{,}5-2a}=\frac{7{,}5}{2}-\frac{1}{8(7{,}5-2a)}=g(a)\le g(1)$$

$=3\frac{8}{11}$ (так как $7{,}5-2a=\frac{2-x}{4-a}>0$). Последнее значение достигается при a=1, когда исходные оценки — это «4», «4», «4», «4», «4» и «1»: тогда старое среднее значение оценок равно $\frac{1+5\cdot 4}{6}=3{,}5$, а новое — $\frac{1+10\cdot 4}{11}=3\frac{8}{11}$.

Ответ: а) $3\frac{2}{3}$; б) $3\frac{8}{11}$.

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные результаты	4
Верно получены и обоснованы результаты, но допущена вычислительная ошибка	3
Верно получен и обоснован результат пункта б)	2
Верно получен и обоснован результат пункта а)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4