Решения заданий части С

VIII онлайн-турнира на форуме

ALEXLARIN.COM

С1. А)Решить уравнение: $\sqrt{3}(\sin 2x+\cos 3x)=\cos 2x-\sin 3x$.

Б) Найти все решения, принадлежащие отрезку $[1;2]$.

Умножим уравнение на $\frac{1}{2}$ *и сгруппируем относительно аргументов*

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 3x+\frac{1}{2}\sin 3x=\frac{1}{2}\cos 2x-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x$$

$$\cos(3x-\frac{\pi}{6})=\cos(2x+\frac{\pi}{3})$$

$\bullet$*Первый способ* :

$$\cos(3x-\frac{\pi}{6})-\cos(2x+\frac{\pi}{3})=0$$

$$-2\sin\frac{3x-\frac{\pi}{6}+2x+\frac{\pi}{3}}{2}\cdot\sin\frac{3x-\frac{\pi}{6}-2x-\frac{\pi}{3}}{2}=0$$

$$\sin\frac{5x+\frac{\pi}{6}}{2}=0 \qquad \textit{или} \qquad \sin\frac{x-\frac{\pi}{2}}{2}=0$$

$$\frac{5x+\frac{\pi}{6}}{2}=\pi n, n\in\mathbb{Z} \qquad \frac{x-\frac{\pi}{2}}{2}=\pi n, n\in\mathbb{Z}$$

$$x=-\frac{\pi}{30}+\frac{2\pi n}{5}, n\in\mathbb{Z} \qquad x=\frac{\pi}{2}+2\pi n, n\in\mathbb{Z}$$

$\bullet$*Второй способ* :

Известно, что $\cos f(x)=\cos g(x)\Leftrightarrow f(x)=\pm g(x)+2\pi n, n\in Z.$

$$\left[\begin{array}{l}3x-\frac{\pi}{6}=2x+\frac{\pi}{3}+2\pi n\\ 3x-\frac{\pi}{6}=-(2x+\frac{\pi}{3})+2\pi n, n\in\mathbb{Z}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{2}+2\pi n\\ 5x=-\frac{\pi}{6}+2\pi n, n\in\mathbb{Z}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{2}+2\pi n\\ x=-\frac{\pi}{30}+\frac{2}{5}\pi n, n\in\mathbb{Z}\end{array}\right.$$

Теперь нужно выбрать корни из заданного отрезка:

$$1 \le \frac{\pi}{2} + 2\pi n \le 2 \quad \left| \cdot \frac{2}{\pi} \right.$$

$$\frac{2}{\pi} \le 1 + 4n \le \frac{4}{\pi} \quad \left| -1 \right.$$

$$\frac{2-\pi}{\pi} \le 4n \le \frac{4-\pi}{\pi} \left| \cdot \frac{1}{4} \right.$$

$$\frac{2-\pi}{4\pi} \le n \le \frac{4-\pi}{4\pi}$$

$$n = 0$$

$$x_1 = \frac{\pi}{2}$$

$$1 \le -\frac{\pi}{30} + \frac{2}{5}\pi n \le 2 \quad \left| \cdot \frac{30}{\pi} \right.$$

$$\frac{30}{\pi} \le -1 + 12n \le \frac{60}{\pi} \quad \left| +1 \right.$$

$$\frac{30+\pi}{\pi} \le 12n \le \frac{60+\pi}{\pi} \left| \cdot \frac{1}{12} \right.$$

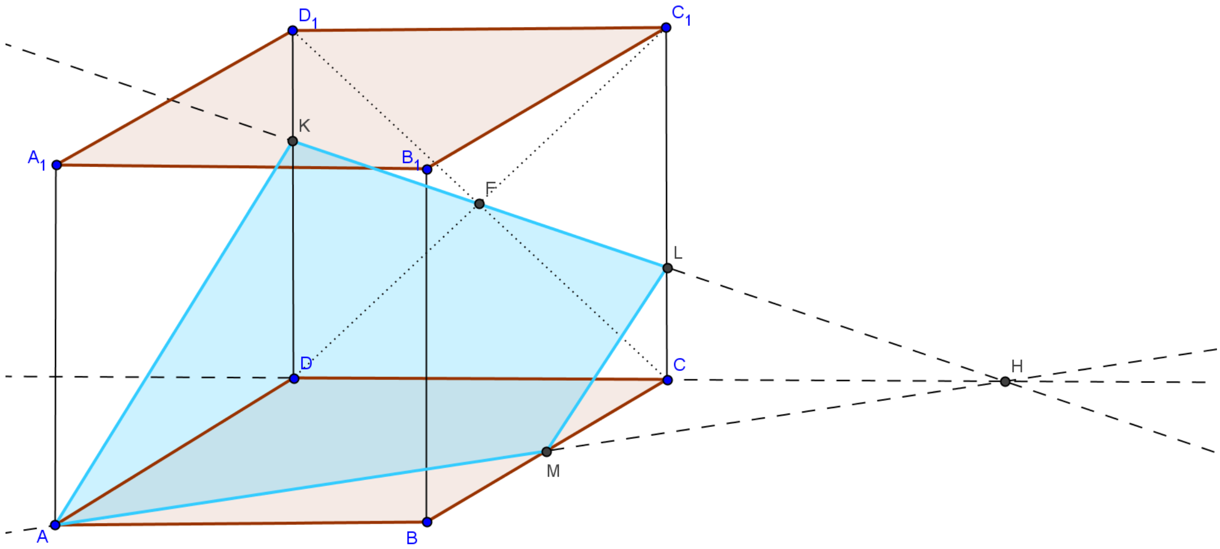
$$\frac{30+\pi}{12\pi} \le n \le \frac{60+\pi}{12\pi}$$

$$n = 1$$

$$x_2 = -\frac{\pi}{30} + \frac{2}{5}\pi = \frac{11\pi}{30}$$

Ответ: А) $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$; $x = -\frac{\pi}{30} + \frac{2}{5}\pi n, n \in Z$. Б) $\frac{\pi}{2}$; $\frac{11\pi}{30}$.

C2. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 4. Найти площадь сечения куба плоскостью, проходящей через вершину A, середину ребра BC и центр грани DCC_1D_1.



Сначала построим сечение. Пусть $M - середина\ \ BC, F - центр\ \ грани\ DCC_1D_1$

Точки A $и$ M принадлежат как искомой плоскости α, так и плоскости основания $ABCD$, значит, $\alpha \cap (ABCD) = AM$.

$AM \cap CD = H \Rightarrow H \in \alpha$.

$$\left.\begin{array}{l} F \in \alpha\ ;\ H \in \alpha \\ F \in (DCC_1D_1); H \in (DCC_1D_1) \end{array}\right\} \Rightarrow (DCC_1D_1) \cap \alpha = FH$$

$FH \cap CC_1 = L;\ \ FH \cap DD_1 = K$

$AKLM - искомое\ \ сечение.$

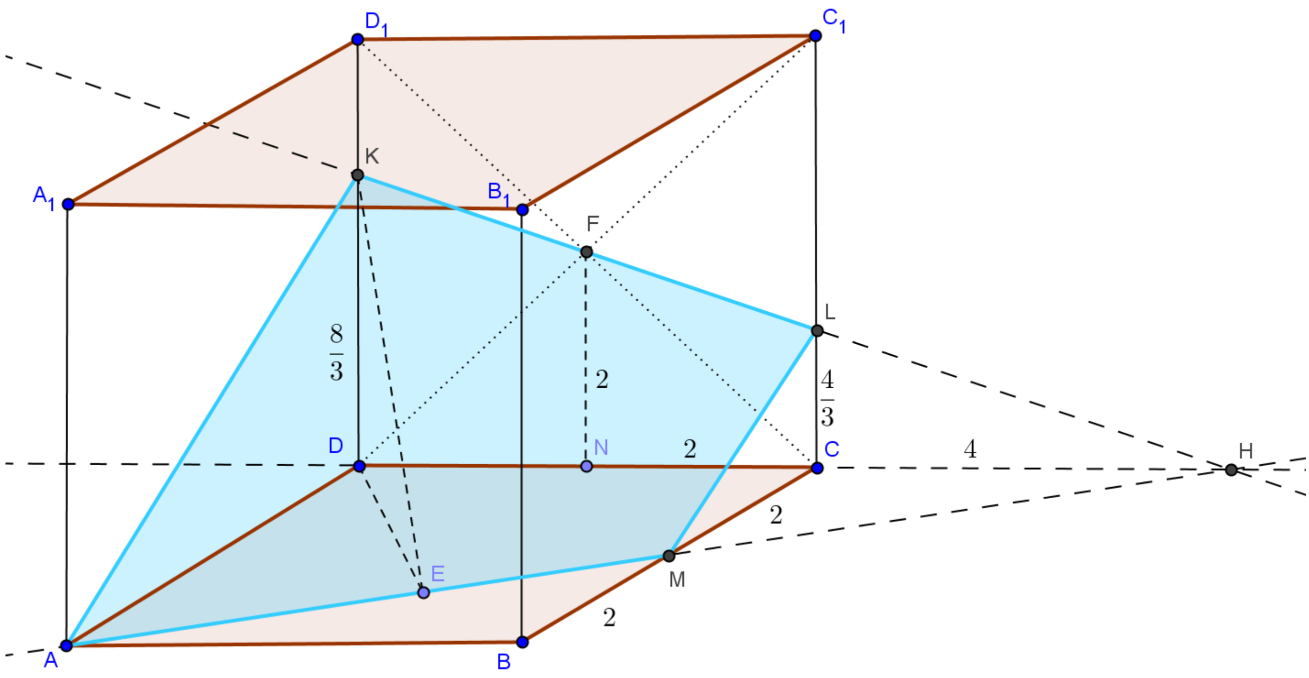
$Так\ \ как\ \ (ADD_1A_1) \parallel (BCC_1B_1),\ то\ AK \parallel ML \Rightarrow AKLM - трапеция$.

Чтобы найти площадь трапеции, нам нужно вычислить некоторые метрические элементы.

$\triangle AMB = \triangle HMC\ по\ катету\ и\ острому\ углу\ \Rightarrow CH = 4, AM = MH = 2\sqrt{5}$

$Опустим\ перпендикуляр\ \ FN\ на\ DC, N - середина\ DC, \angle FCN = 45^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow FN = NC = 2$



$$\triangle LCH \sim \triangle FNH \Rightarrow \frac{LC}{CH}=\frac{FN}{NH} \Rightarrow LC=\frac{2\cdot 4}{2+4}=\frac{4}{3}$$

$$\triangle LCH \sim \triangle KDH \Rightarrow \frac{LC}{CH}=\frac{KD}{DH} \Rightarrow KD=\frac{\frac{4}{3}\cdot 8}{4}=\frac{8}{3}$$

Пусть $KE \perp AH$, *тогда по теореме о трёх перпендикулярах* $DE \perp AH$.

$$S_{\triangle ADH}=\frac{1}{2}DE\cdot AH=\frac{1}{2}AD\cdot DH \Rightarrow DE=\frac{AD\cdot DH}{AH}=\frac{4\cdot 8}{4\sqrt{5}}=\frac{8}{\sqrt{5}}$$

$$KE=\sqrt{DK^2+DE^2}=\sqrt{\frac{64}{5}+\frac{64}{9}}=\sqrt{64\cdot\frac{9+5}{45}}=\frac{8\sqrt{14}}{3\sqrt{5}}$$

- $\triangle AKH \sim \triangle MLH, k=2 \Rightarrow S_{\triangle MLH}=\frac{1}{4}S_{\triangle AKH} \Rightarrow S_{AKLM}=\frac{3}{4}S_{\triangle AKH}$

  $$S_{\triangle AKH}=\frac{1}{2}\cdot 4\sqrt{5}\cdot\frac{8\sqrt{14}}{3\sqrt{5}}=\frac{16\sqrt{14}}{3} \Rightarrow S_{AKLM}=\frac{3}{4}\cdot\frac{16\sqrt{14}}{3}=4\sqrt{14}.$$

- $S_{проекции}=S_{сечения}\cdot\cos\varphi$, *где* φ *– угол между сечением и проекцией*

  $$S_{проекции}=S_{ADCM}=\frac{1}{2}(4+2)\cdot 4=12$$

  $$\cos\varphi=\cos\angle KED=\frac{DE}{KE}=\frac{8}{\sqrt{5}}:\frac{8\sqrt{14}}{3\sqrt{5}}=\frac{3}{\sqrt{14}}$$

  $$S_{сечения}=\frac{S_{проекции}}{\cos\varphi}=\frac{12\sqrt{14}}{3}=4\sqrt{14}.$$

Ответ: $4\sqrt{14}$.

С3. Решить систему неравенств:

$$\begin{cases} |\sqrt{x+4}-2|>\dfrac{6}{\sqrt{x+4}-3} \\ \dfrac{(x^2+x+1)^2-2|x^3+x^2+x|-3x^2}{10x^2-17x-6}\ge 0 \end{cases}.$$

Решим первое неравенство системы:

$$|\sqrt{x+4}-2|>\frac{6}{\sqrt{x+4}-3}$$

Пусть $t=\sqrt{x+4}-2,\ \ t\in[-2;+\infty)$ *тогда неравенство*

можем переписать так: $|t|>\dfrac{6}{t-1}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t>\dfrac{6}{t-1} \\ t<-\dfrac{6}{t-1} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{t^2-t-6}{t-1}>0 \\ \dfrac{t^2-t+6}{t-1}<0 \end{array}\right. \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{(t-3)(t+2)}{t-1}>0 \\ \dfrac{t^2-t+6}{t-1}<0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -2\le t<1 \\ t>3 \end{array}\right.$$

Переходим к старой переменной:

$-2\le\sqrt{x+4}-2<1$ *или* $\sqrt{x+4}-2>3$

$0\le\sqrt{x+4}<3$ $\qquad\sqrt{x+4}>5$

$0\le x+4<9$ $\qquad x+4>25$

$-4\le x<5$ $\qquad x>21$

Значит, $x\in[-4;5)\cup(21;+\infty)$

Прежде, чем приступить к решению второго неравенства системы, попытаемся разложить на множители числитель и знаменатель дроби.

•*Пусть* $x^2+x+1=a,\ \ |x|=b,$ *и, учитывая, что* $a>0,$ *тогда*

$(x^2+x+1)^2-2|x^3+x^2+x|-3x^2=a^2-2ab-3b^2=(a-3b)(a+b)=$

$=(x^2+x+1-3|x|)(x^2+x+1+|x|).$

•$10x^2-17x-6=(10x+3)(x-2)$

$$\frac{(x^2+x+1-3|x|)(x^2+x+1+|x|)}{(10x+3)(x-2)}\ge 0$$

Множитель $x^2+x+1+|x|>0$ *при любом* $x\in R$, *значит на знак функции влияния не оказывает, поэтому*

$$\frac{x^2+x+1-3|x|}{(10x+3)(x-2)}\ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} x\ge 0\\ \dfrac{x^2-2x+1}{(10x+3)(x-2)}\ge 0\end{cases}\\ \begin{cases} x<0\\ \dfrac{x^2+4x+1}{(10x+3)(x-2)}\ge 0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} x\ge 0\\ \dfrac{(x-1)^2}{(10x+3)(x-2)}\ge 0\end{cases}\\ \begin{cases} x<0\\ \dfrac{(x+2)^2-3}{(10x+3)(x-2)}\ge 0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} x\ge 0\\ \dfrac{(x-1)^2}{(10x+3)(x-2)}\ge 0\end{cases}\\ \begin{cases} x<0\\ \dfrac{(x+2+\sqrt{3})(x+2-\sqrt{3})}{(10x+3)(x-2)}\ge 0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\in\{1\}\cup(2;+\infty)\\ x\in(-\infty;-2-\sqrt{3}]\cup(-0,3;-2+\sqrt{3}]\end{array}\right.$$

Сравнение $: -0,3\vee -2+\sqrt{3}$

$$2-0,3\vee\sqrt{3}$$

$$1,7\vee\sqrt{3}$$

$$2,89\vee 3$$

$$2,89<3\Rightarrow -0,3<-2+\sqrt{3}$$

Итак, $x\in(-\infty;-2-\sqrt{3}]\cup(-0,3;-2+\sqrt{3}]\cup\{1\}\cup(2;+\infty)$

Теперь подведём итог. Чтобы пересечь полученные множества решений неравенств, необходимо сравнить числа $-2-\sqrt{3}$ *и* -4:

$$-2-\sqrt{3}\vee -4$$

$$2+\sqrt{3}\wedge 4$$

$$\sqrt{3}\wedge 2$$

$$3\wedge 4$$

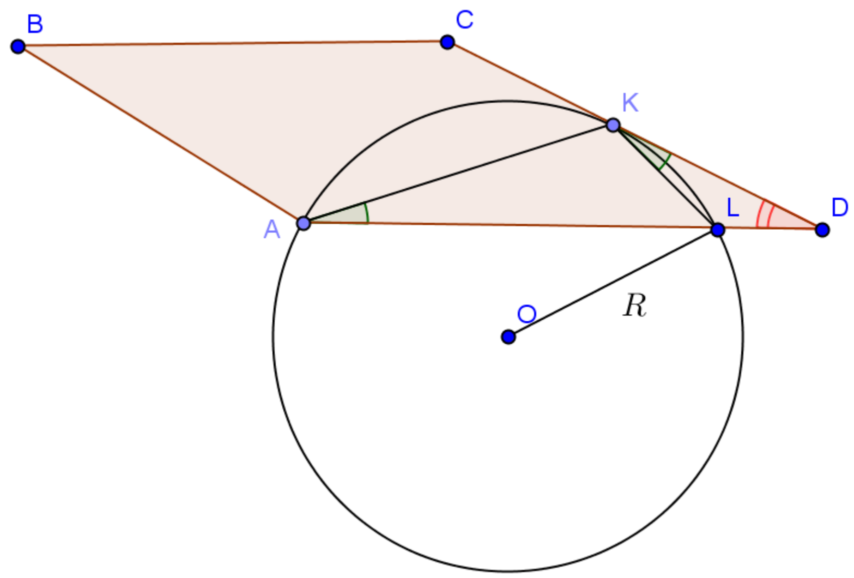
$$3<4\Rightarrow -2-\sqrt{3}>-4$$

Значит, $x\in[-4;-2-\sqrt{3}]\cup(-0,3;-2+\sqrt{3}]\cup\{1\}\cup(2;5)\cup(21;+\infty)$

C4. В параллелограмме $ABCD$ $\angle BCD = 150^\circ$, а длина стороны $AD = 8$. Найти длину радиуса окружности, касающейся прямой CD и проходящей через вершину A, а также пересекающей сторону AD на расстоянии 2 от точки D.

В этой задаче возможно два различных случая: K-точка касания прямой CD окружности из условия задачи может лежать на луче DC, а может лежать на его дополнении.

Рассмотрим первый случай:



Пусть окружность пересекает сторону AD в точке L, тогда $LD = 2, AL = 6$.

По свойству касательной и секущей, проведённых к окружности из одной точки, имеем: $DK^2 = AD \cdot DL = 2 \cdot 8 = 16 \Rightarrow DK = 4$.

Поскольку $\angle BCD = 150^\circ$, тогда $\angle CDA = 30^\circ$.

$$\angle LKD = \frac{1}{2} \cup KL = \angle KAL.$$

Для $\triangle KLD$ запишем теорему синусов:

$$\frac{LD}{\sin \angle LKD} = \frac{KL}{\sin 30^\circ} \Rightarrow \sin \angle LKD = \frac{LD \cdot \sin 30^\circ}{KL} = \frac{2 \cdot \frac{1}{2}}{KL} = \frac{1}{KL}.$$

А теперь запишем теорему синусов для $\triangle AKL$:

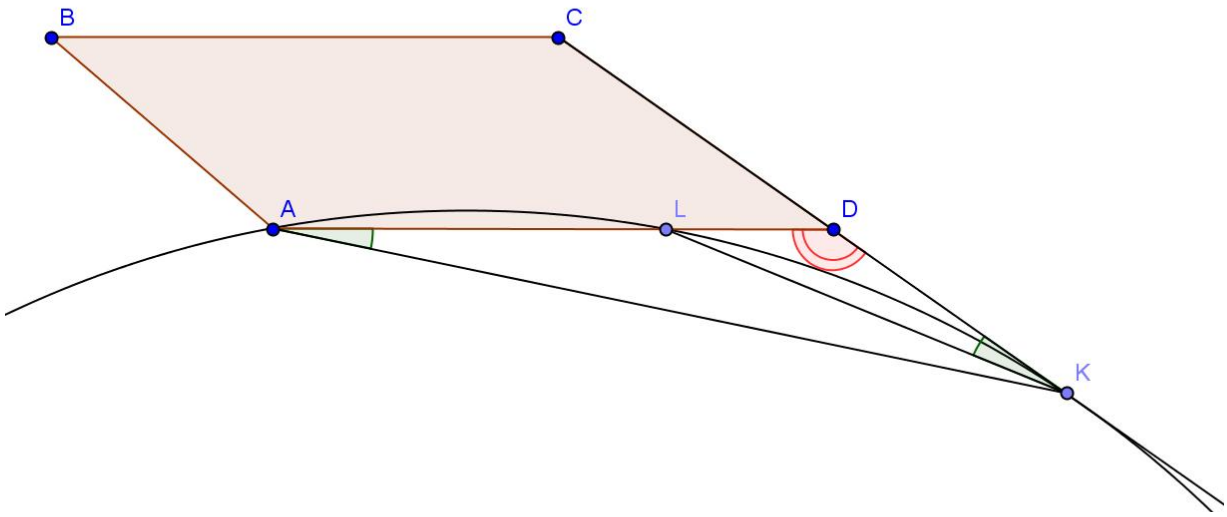
$$\frac{KL}{\sin \angle KAL} = 2R \Rightarrow R = \frac{KL}{2 \sin \angle KAL} = \frac{KL}{2 \cdot \frac{1}{KL}} = \frac{KL^2}{2}$$

Осталось найти KL. Из $\triangle KLD$ по теореме косинусов имеем

$$KL^2 = KD^2 + LD^2 - 2KD \cdot LD \cdot \cos\angle KDL = 16 + 4 - 2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 20 - 8\sqrt{3}$$

Значит, $R = 10 - 4\sqrt{3}$.

Теперь рассмотрим второй случай.



Аналогично первому случаю

$$DK^2 = AD \cdot DL = 2 \cdot 8 = 16 \Rightarrow DK = 4$$

$$\angle BCD = \angle KDL = 150^\circ \Rightarrow \sin\angle KDL = \frac{1}{2}$$

Выкладки для теоремы синусов будут те же самые. Различие появится лишь в теореме косинусов при нахождении длины отрезка KL:

$$KL^2 = KD^2 + LD^2 - 2KD \cdot LD \cdot \cos\angle KDL = 16 + 4 + 2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 20 + 8\sqrt{3}$$

Значит, $R = 10 + 4\sqrt{3}$.

Ответ: $R = 10 \pm 4\sqrt{3}$.

C5. Найти все значения параметра α , при которых больший корень уравнения

$x^2+\frac{x+4}{\sqrt{3}}\sin 2\alpha-16=0$ на $\sqrt{\frac{2}{3}}$ больше, чем квадрат разности корней уравнения

$x^2-x\sin\alpha+\frac{\cos^2\alpha}{4}-1=0$.

Найдём корни уравнения $x^2+\frac{x+4}{\sqrt{3}}\sin 2\alpha-16=0$.

$$x^2-16+\frac{x+4}{\sqrt{3}}\sin 2\alpha=0$$

$$(x+4)(x-4)+(x+4)\frac{\sin 2\alpha}{\sqrt{3}}=0$$

$$(x+4)(x-(4-\frac{\sin 2\alpha}{\sqrt{3}}))=0$$

$$X=-4 \ \ \textit{или} \ \ x=4-\frac{\sin 2\alpha}{\sqrt{3}}$$

Очевидно, что $x=4-\frac{\sin 2\alpha}{\sqrt{3}}$ *– наибольший корень*

$$x^2-x\sin\alpha+\frac{\cos^2\alpha}{4}-1=0$$

$$D=\sin^2\alpha-\cos^2\alpha+4=4-\cos 2\alpha>0\Rightarrow$$

уравнение имеет два корня для любых значений параметра α.

По теореме Виета $\begin{cases} x_1+x_2=\sin\alpha \\ x_1x_2=\frac{\cos^2\alpha}{4}-1 \end{cases}$

$$(x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=\sin^2\alpha-\cos^2\alpha+4=4-\cos 2\alpha$$

Наконец, по условию задачи имеем

$$4-\frac{\sin 2\alpha}{\sqrt{3}}-\sqrt{\frac{2}{3}}=4-\cos 2\alpha$$

$$\cos 2\alpha-\frac{\sin 2\alpha}{\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{2}{3}}\ \Bigg|\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$

ALEXLARIN.COM

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2\alpha - \frac{1}{2}\sin 2\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos(2\alpha + \frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow 2\alpha + \frac{\pi}{6} = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi n \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \alpha = \dfrac{\pi}{24} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ \alpha = -\dfrac{5\pi}{24} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$$

Ответ: $\alpha = \dfrac{\pi}{24} + \pi n,\ \alpha = -\dfrac{5\pi}{24} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$

С6. На доске написаны числа 1 и 2. Каждый день научный консультант Выбегалло заменяет два написанных числа на их среднее арифметическое и среднее гармоническое. *(Среднее арифметическое двух чисел- это половина их суммы. Среднее гармоническое чисел* a *и* b *- это такое число* c *,что* $\dfrac{1}{c}$ *- есть среднее арифметическое чисел* $\dfrac{1}{a}$ *и* $\dfrac{1}{b}$*).*

А) Однажды одним из написанных чисел (каким - неизвестно) оказалось $\dfrac{941664}{665857}$.Каким в этот момент было другое число?

Б) Будет ли когда-нибудь написано число $\dfrac{35}{24}$?

Пусть m,n – два положительных числа.

$a(m,n) = \dfrac{m+n}{2}$ – их среднее арифметическое,

$h(m,n) = \dfrac{2}{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}} = \dfrac{2mn}{m+n}$ (так как $\dfrac{1}{h} = \dfrac{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}{2}$) – их среднее гармоническое,

$g(m,n) = \sqrt{mn}$ – их среднее геометрическое.

Свойства средних двух положительных чисел:

Так как $m>0, n>0,$ *то* $\bullet\, a(m,n)>0,\ h(m,n)>0,\ g(m,n)>0$ (*)

$$\bullet\, a(m,n)\cdot h(m,n)=\frac{m+n}{2}\cdot\frac{2mn}{m+n}=mn=g^2(m,n) \qquad (**)$$

$$\bullet\, a(m,n)\ge g(m,n)\ge h(m,n),\ \ \textit{так как}\ (\sqrt{m}-\sqrt{n})^2\ge 0 \qquad (***)$$

Пусть теперь $a_1=2,\ h_1=1,\ a_{k+1}=a(a_k,h_k), h_{k+1}=h(a_k,h_k), k\in\mathbb{N}$ (когда научный консультант Выбегалло Амвросий Амбруазович берёт тряпку и мел в k-ый раз, он стирает a_k, h_k и пишет a_{k+1} и h_{k+1}).

Прежде всего заметим, что из (**) следует, что

[1] $\quad a_{k+1}\cdot h_{k+1}=a_k\cdot h_k=.....=a_1h_1=2,$

поэтому, согласно (***),

[2] $\quad a_k\ge\sqrt{2}\ge h_k, k\in\mathbb{N}.$

Так как $a_{k+1}=\dfrac{a_k+h_k}{2}\le a_k$ (см.[2]), то последовательность a_k не возрастает,

и с учётом (*), последовательность $h_k=\dfrac{2}{a_k}$ (см.[1]) не убывает, то есть

[3] $\quad 2=a_1\ge a_2\ge....\ge a_k\ge...\ge\sqrt{2}\ge...\ge h_k\ge....\ge h_2\ge h_1=1.$

Теперь мы в состоянии ответить на поставленные вопросы.

А) Согласно [1], парой для числа $\dfrac{941664}{665857}$ является число $\dfrac{665857}{470832}$ (по секрету, это h_5 и a_5, так что всё хорошо с условием).

Б) Так как число $\dfrac{35}{24}>\sqrt{2},$ то, по [2], оно могло бы занять место только среди $\{a_k\}$.

Но, согласно [3], $a_1\ge a_2\ge a_3\ge...,$ а $a_2=\dfrac{3}{2}>\dfrac{35}{24}>\dfrac{17}{12}=a_3,$ и поэтому число $\dfrac{35}{24}$ никогда не будет написано.

Ответ: А) $\dfrac{665857}{470832}$; Б) Нет, не будет.