01-803-03

15.07.13 г.

Единый государственный экзамен по МАТЕМАТИКЕ

Инструкция по выполнению работы

На выполнение экзаменационной работы по математике даётся 3 часа 55 минут (235 минут). Работа состоит из двух частей, включающих в себя 20 заданий.

Часть 1 содержит 14 заданий с кратким ответом (B1–B14) базового уровня по материалу курса математики. Ответом является целое число или конечная десятичная дробь.

Часть 2 содержит 6 более сложных заданий (C1–C6) по материалу курса математики. При их выполнении надо записать полное решение и ответ.

Все бланки ЕГЭ заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой, капиллярной или перьевой ручки.

При выполнении заданий Вы можете пользоваться черновиком. Обращаем Ваше внимание, что записи в черновике не будут учитываться при оценивании работы.

Советуем выполнять задания в том порядке, в котором они даны. Для экономии времени пропускайте задание, которое не удаётся выполнить сразу, и переходите к следующему. Если после выполнения всей работы у Вас останется время, Вы сможете вернуться к пропущенным заданиям.

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

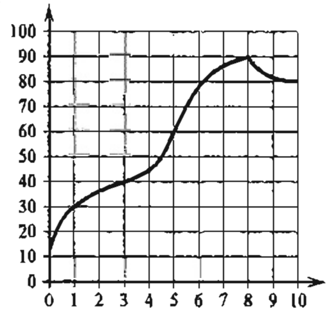
Желаем успеха!

Часть 1

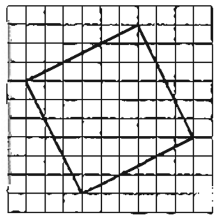
Ответом на задания B1–B14 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Ответ следует записать в бланк ответов № 1 справа от номера выполняемого задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак минус и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

B1 Налог на доходы составляет 13% от заработной платы. Заработная плата Андрея Сергеевича равна 13 500 рублей. Какую сумму он получит после вычета налога на доходы? Ответ дайте в рублях.

B2 На графике показан процесс разогрева двигателя легкового автомобиля. На оси абсцисс откладывается время в минутах, прошедшее с момента запуска двигателя, на оси ординат — температура двигателя в градусах Цельсия. Определите по графику, на сколько градусов нагреется двигатель с первой по восьмую минуту разогрева.



B3 Найдите площадь квадрата, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см (см. рис.). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



01-803-03

B4 Независимое агентство каждый месяц определяет рейтинги R новостных сайтов на основе показателей информативности In, оперативности Op и объективности Tr публикаций. Каждый отдельный показатель оценивается целыми числами от -2 до 2. Итоговый рейтинг вычисляется по формуле

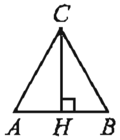
$$R = 25 \cdot \left(\frac{2In + Op + 3Tr}{6} + 2 \right).$$

В таблице даны оценки каждого показателя для нескольких новостных сайтов. Определите наивысший рейтинг новостных сайтов, представленных в таблице. Запишите его в ответ, округлив до целого числа.

Сайт	Информативность	Оперативность	Объективность
VoKak.ru	2	2	2
NashiNovosti.com	0	0	1
Bezvrak.ru	-2	1	0
Zhizni.net	2	2	0

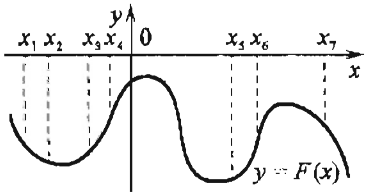
B5 Найдите корень уравнения $2^{\log_4(2x+5)} = 2$.

B6 В равностороннем треугольнике ABC высота CH равна $24\sqrt{3}$. Найдите AB.

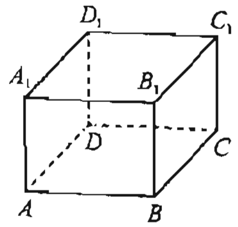


B7 Найдите $\cos\alpha$, если $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ и $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

B8 На рисунке изображён график $y = F(x)$ одной из первообразных некоторой функции $f(x)$ и отмечены семь точек на оси абсцисс: x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7. В скольких из этих точек функция $f(x)$ положительна?

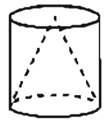


B9 В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известно, что $D_1B = 2AB$. Найдите угол между диагоналями BD_1 и CA_1. Ответ дайте в градусах.



B10 В случайном эксперименте бросают две игральные кости. Найдите вероятность того, что произведение выпавших очков — чётное число.

B11 Конус и цилиндр имеют общее основание и общую высоту (конус вписан в цилиндр). Вычислите объём конуса, если объём цилиндра равен 162.



B12 Зависимость объёма спроса q (единиц в месяц) на продукцию предприятия-монополиста от цены p (тыс. руб.) задаётся формулой $q = 85 - 5p$. Выручка предприятия за месяц r (в тыс. руб.) вычисляется по формуле $r(p) = q \cdot p$. Определите наибольшую цену p, при которой месячная выручка $r(p)$ составит не менее 300 тыс. руб. Ответ приведите в тыс. руб.

B13 На изготовление 77 деталей первый рабочий тратит на 4 часа меньше, чем второй рабочий на изготовление 99 таких же деталей. Известно, что первый рабочий за час делает на 2 детали больше, чем второй. Сколько деталей за час делает второй рабочий?

B14 Найдите точку минимума функции $y = x^3 - 4x^2 + 4x + 17$.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

01- 803-03

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания С1–С6 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (С1, С2 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ.

C1 а) Решите уравнение $3\operatorname{tg}^2 x - \dfrac{5}{\cos x} + 1 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\dfrac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$.

C2 В правильной треугольной пирамиде $MABC$ с вершиной M высота равна 3, а боковые рёбра равны 6. Найдите площадь сечения этой пирамиды плоскостью, проходящей через середины сторон AB и AC параллельно прямой MA.

C3 Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 2^x + 17\cdot 2^{3-x} \le 25, \\ \dfrac{x^2-3x-5}{x-4} + \dfrac{3x^2-15x+2}{x-5} \le 4x+1. \end{cases}$$

C4 Радиусы окружностей с центрами O_1 и O_2 равны соответственно 2 и 9. Найдите радиус третьей окружности, которая касается двух данных и прямой O_1O_2, если $O_1O_2 = 21$.

C5 Найдите все значения a, при которых уравнение

$$\frac{7a}{a-5}\cdot 2^{|x|} = 4^{|x|} + \frac{12a+17}{a-5}$$

имеет ровно два различных корня.

C6 Натуральные числа a, b, c и d удовлетворяют условию $a > b > c > d$.

а) Найдите числа a, b, c и d, если $a+b+c+d = 16$ и $a^2 - b^2 + c^2 - d^2 = 32$.

б) Может ли быть $a+b+c+d = 29$ и $a^2 - b^2 + c^2 - d^2 = 29$?

в) Пусть $a+b+c+d = 1400$ и $a^2 - b^2 + c^2 - d^2 = 1400$. Найдите количество возможных значений числа a.

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

C1 а) Решите уравнение $3\operatorname{tg}^2 x - \frac{5}{\cos x} + 1 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$.

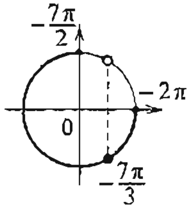
Решение.

а) Запишем исходное уравнение в виде:

$$\frac{3\sin^2 x}{\cos^2 x} - \frac{5}{\cos x} + 1 = 0;\ \frac{3 - 3\cos^2 x - 5\cos x + \cos^2 x}{\cos^2 x} = 0;$$

$$\frac{-2\cos^2 x - 5\cos x + 3}{\cos^2 x} = 0;\ \frac{(2\cos x - 1)(\cos x + 3)}{\cos^2 x} = 0.$$

Значит, либо $\cos x = \frac{1}{2}$, откуда $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, или $x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, либо $\cos x = -3$ — нет корней.



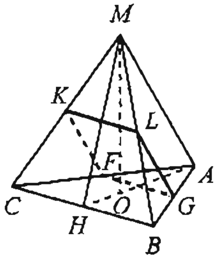
б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$.

Получим число $-\frac{7\pi}{3}$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; $-\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{7\pi}{3}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или в пункте *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

C2 В правильной треугольной пирамиде $MABC$ с вершиной M высота равна 3, а боковые рёбра равны 6. Найдите площадь сечения этой пирамиды плоскостью, проходящей через середины сторон AB и AC параллельно прямой MA.



Решение.

Пусть F и G — середины рёбер AC и AB соответственно. Отрезки FK и GL параллельны MA, где точки K и L — середины рёбер MC и MB соответственно. Поскольку $FK = \frac{MA}{2} = GL$, искомое сечение — параллелограмм $FGLK$.

Пусть MH — высота и медиана треугольника MBC, AH — медиана и высота треугольника ABC, тогда плоскость MHA перпендикулярна плоскости ABC, значит, прямая MA перпендикулярна прямой BC. Отрезок FK параллелен MA, отрезок FG параллелен BC, следовательно, $FGLK$ — прямоугольник.

Пусть MO — высота пирамиды, тогда $MO = 3$, $MA = 6$, откуда $OA = 3\sqrt{3}$. В правильном треугольнике ABC, где O — его центр, $BC = OA\sqrt{3} = 9$.

В прямоугольнике $FGLK$

$$FG = \frac{BC}{2} = \frac{9}{2};\ FK = \frac{MA}{2} = 3;\ S_{FGLK} = FG \cdot FK = \frac{27}{2}.$$

Ответ: $\frac{27}{2}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит обоснованный переход к планиметрической задаче, но получен неверный ответ или решение не закончено, или при правильном ответе решение недостаточно обосновано	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

C3 Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 2^x + 17 \cdot 2^{3-x} \le 25, \\ \frac{x^2 - 3x - 5}{x - 4} + \frac{3x^2 - 15x + 2}{x - 5} \le 4x + 1. \end{cases}$$

Решение.

1. Решим первое неравенство системы:

$$2^x + 17 \cdot 2^{3-x} \le 25;\ 2^{2x} - 25 \cdot 2^x + 136 \le 0.$$

Пусть $t = 2^x$, тогда неравенство примет вид: $t^2 - 25t + 136 \le 0$, откуда $8 \le t \le 17$; $8 \le 2^x \le 17$; $3 \le x \le \log_2 17$.

Решение первого неравенства исходной системы: $3 \le x \le \log_2 17$.

2. Решим второе неравенство системы:

$$\frac{x^2 - 3x - 5}{x - 4} + \frac{3x^2 - 15x + 2}{x - 5} \le 4x + 1;$$

$$\frac{(x-4)(x+1)}{x-4} - \frac{1}{x-4} + \frac{3x(x-5)}{x-5} + \frac{2}{x-5} \le 4x + 1;$$

$$-\frac{1}{x-4} + \frac{2}{x-5} \le 0;\ \frac{x-3}{(x-4)(x-5)} \le 0.$$

Решение второго неравенства исходной системы: $x \le 3$; $4 < x < 5$.

3. Поскольку $4 < \log_2 17 < 5$, получаем решение исходной системы неравенств: $x = 3$; $4 < x \le \log_2 17$.

Ответ: 3; $(4; \log_2 17]$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Обоснованно получены верные ответы в обоих неравенствах исходной системы	2
Обоснованно получен верный ответ в одном неравенстве исходной системы	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

C4 Радиусы окружностей с центрами O_1 и O_2 равны соответственно 2 и 9. Найдите радиус третьей окружности, которая касается двух данных и прямой O_1O_2, если $O_1O_2 = 21$.

Решение.

Пусть O — центр третьей окружности, A — точка касания первой и третьей окружностей, B — второй и третьей, C — третьей окружности и прямой O_1O_2. Точки O_1, A и O лежат на одной прямой. Точки O_2, B и O также лежат на одной прямой.

Пусть радиус третьей окружности равен x, тогда $OO_1 = 2 + x$, $OO_2 = 9 + x$.

В прямоугольном треугольнике OCO_1 имеем $O_1C = \sqrt{OO_1^2 - OC^2} = \sqrt{4 + 4x}$.

В прямоугольном треугольнике OCO_2 имеем $O_2C = \sqrt{OO_2^2 - OC^2} = \sqrt{81 + 18x}$.

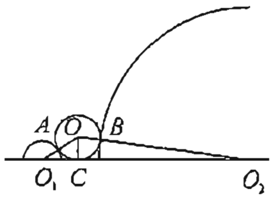


Рис. 1

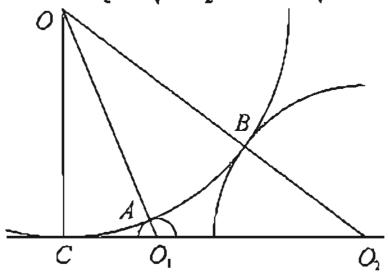


Рис. 2

Возможны два случая. Первый случай: точка C лежит между точками O_1 и O_2 (рис. 1), тогда

$O_1O_2 = O_1C + O_2C$; $\sqrt{4 + 4x} + \sqrt{81 + 18x} = 21$; $\sqrt{(4 + 4x)(81 + 18x)} = 178 - 11x$, откуда $x = 8$.

Второй случай: точка O_1 лежит между точками C и O_2 (рис. 2), тогда

$O_1O_2 = O_2C - O_1C$; $\sqrt{81 + 18x} - \sqrt{4 + 4x} = 21$; $\sqrt{(4 + 4x)(81 + 18x)} = 11x - 178$, откуда $x = 80$.

Ответ: 8 или 80.

Содержание критерия	Баллы
Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации и получен правильный ответ	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, в которой получено правильное значение искомой величины	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, в которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

C5 Найдите все значения a, при которых уравнение

$$\frac{7a}{a-5} \cdot 2^{|x|} = 4^{|x|} + \frac{12a+17}{a-5}$$

имеет ровно два различных корня.

Решение.

Пусть $2^{|x|} = t$, $t \ge 1$.

Если $t > 1$, тогда $|x| = \log_2 t$; $x = \log_2 t$ и $x = -\log_2 t$.

Если $t = 1$, тогда $|x| = 0$; $x = 0$.

Обозначим $f(t) = t^2 - \frac{7a}{a-5} \cdot t + \frac{12a+17}{a-5}$.

Исходное уравнение имеет ровно два корня тогда и только тогда, когда уравнение $f(t) = 0$ имеет единственный корень, больший 1, или уравнение $f(t) = 0$ имеет два корня, один из которых больше 1, а другой меньше 1.

Уравнение $t^2 - \frac{7a}{a-5} \cdot t + \frac{12a+17}{a-5} = 0$ имеет ровно один корень, если дискриминант равен нулю:

$$\left(\frac{7a}{a-5}\right)^2 - 4 \cdot \frac{12a+17}{a-5} = 0;\ \frac{a^2 + 172a + 340}{(a-5)^2} = 0;\ a = -2 \text{ или } a = -170.$$

При $a = -2$ уравнение $t^2 - 2t + 1 = 0$ имеет единственный корень $t = 1$. В этом случае исходное уравнение имеет единственный корень $x = 0$.

При $a = -170$ уравнение $t^2 - \frac{34}{5} \cdot t + \frac{289}{25} = 0$ имеет единственный корень $t = 3{,}4$. В этом случае исходное уравнение имеет два корня.

Графиком функции $f(t)$ является парабола, ветви которой направлены вверх. Для того чтобы уравнение $f(t)=0$ имело два корня, один из которых больше 1, а другой меньше 1, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство

$$f(1)<0;\ 1-\frac{7a}{a-5}+\frac{12a+17}{a-5}<0;\ \frac{6a+12}{a-5}<0;\ -2<a<5.$$

Ответ: -170; $(-2;5)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
Обоснованно получены все значения: $a=-170$, $a=-2$, $a=5$. Ответ отличается от верного включением точки $a=5$	3
Обоснованно получено одно или два из значений $a=-170$, $a=-2$ или $a=5$	2
Задача верно сведена к исследованию квадратного уравнения, но решение не завершено или получен неверный ответ	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

C6 Натуральные числа a, b, c и d удовлетворяют условию $a>b>c>d$.

а) Найдите числа a, b, c и d, если $a+b+c+d=16$ и $a^2-b^2+c^2-d^2=32$.

б) Может ли быть $a+b+c+d=29$ и $a^2-b^2+c^2-d^2=29$?

в) Пусть $a+b+c+d=1400$ и $a^2-b^2+c^2-d^2=1400$. Найдите количество возможных значений числа a.

Решение.

а) Из условия получаем:

$$a^2-b^2+c^2-d^2-2a-2b-2c-2d=0;$$
$$(a-b)(a+b)+(c-d)(c+d)-2a-2b-2c-2d=0;$$
$$(a-b-2)(a+b)+(c-d-2)(c+d)=0.$$

Поскольку $a-b-2\geq -1$, $c-d-2\geq -1$ и $a+b>c+d$, получаем: $a=b+2$ или $c=d+2$, откуда находим $a=7$, $b=5$, $c=3$ и $d=1$.

б) Из условия получаем:

$$a^2-b^2+c^2-d^2=a+b+c+d;$$
$$(a-b)(a+b)+(c-d)(c+d)=a+b+c+d;$$
$$(a-b-1)(a+b)+(c-d-1)(c+d)=0.$$

Поскольку $a-b-1\geq 0$, $a+b>0$, $c-d-1\geq 0$, $c+d>0$, последнее равенство выполняется только при $a=b+1$ и $c=d+1$. Значит, $2b+2d+2=29$, что невозможно.

в) Из равенства $a^2-b^2+c^2-d^2=a+b+c+d$ получаем: $a=b+1$, $c=d+1$. Значит, $2a+2d=1400$; $d=700-a$. Получаем четвёрку чисел $(a;b;c;d)=(a;a-1;701-a;700-a)$. Поскольку $b>c$, получаем: $a>351$. Кроме того, $d>0$, откуда $a<700$.

Значит, a принадлежит промежутку $(351;700)$. Более того, для любого целого a из этого промежутка найденная четвёрка чисел удовлетворяет условию задачи. Таким образом, a может принимать 348 значений.

Ответ: а) $a=7$, $b=5$, $c=3$, $d=1$; б) нет; в) 348.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно выполнены все пункты: *а*, *б* и *в*	4
Обоснованное решение одного из пунктов *а* или *б* и обоснованное решение п. *в*	3
Верно получен один из следующих результатов: — обоснованное решение пунктов *а* и *б*; — обоснованное решение п. *в*	2
Верно получен один из следующих результатов: — обоснованное решение п. *а*; — обоснованное решение п. *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4