РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

VII онлайн-турнира на форуме

ALEXLARIN.COM.

Часть С.

С1. А) Решить уравнение: $\dfrac{6\sin x-2\cos 2x-4\cos^2 x-3}{\sqrt{7}\sin x-3\cos x}=0$.

Б) Найти все решения данного уравнения, принадлежащие промежутку $[\dfrac{\pi}{2};\dfrac{7\pi}{2}]$.

$$\frac{6\sin x-2\cos 2x-4\cos^2 x-3}{\sqrt{7}\sin x-3\cos x}=0$$

$$\begin{cases}6\sin x-2\cos 2x-4\cos^2 x-3=0\\ \sqrt{7}\sin x-3\cos x\neq 0\end{cases};$$

$$6\sin x-2(1-2\sin^2 x)-4(1-\sin^2 x)-3=0$$

$$8\sin^2 x+6\sin x-9=0$$

$$D=36+4\cdot 8\cdot 9=36\cdot 9=18^2$$

$\sin x=\dfrac{-6+18}{16}=\dfrac{3}{4}$ *или* $\sin x=\dfrac{-6-18}{16}=-\dfrac{3}{2}$

$$\left[\begin{array}{l}x=\arcsin\dfrac{3}{4}+2\pi n, n\in Z\\ x=\pi-\arcsin\dfrac{3}{4}+2\pi n, n\in Z\end{array}\right.$$

решений нет

Если $\sin x=\dfrac{3}{4}$, то $\cos x=\pm\sqrt{1-\dfrac{9}{16}}=\pm\dfrac{\sqrt{7}}{4}$

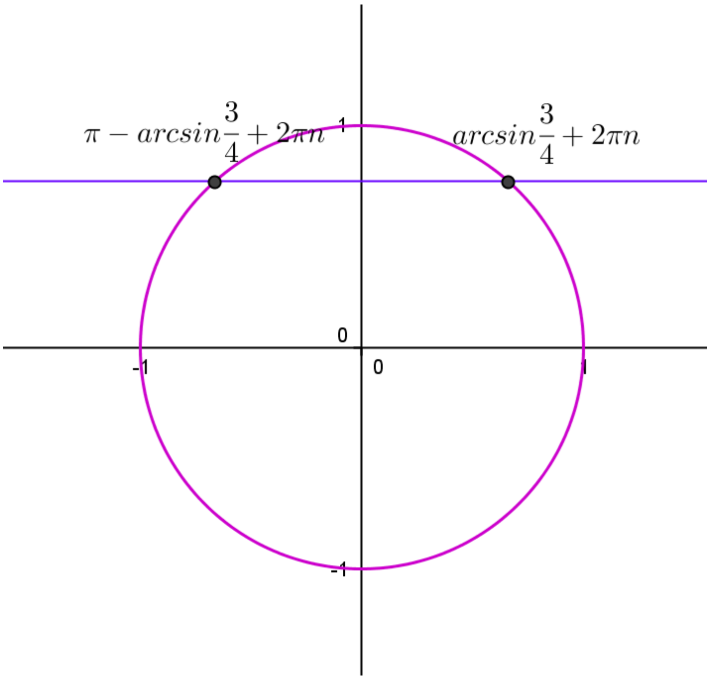
Если $x=\arcsin\dfrac{3}{4}+2\pi n, n\in Z$, *то* $\cos x=\dfrac{\sqrt{7}}{4}$, *значит условие*

$\sqrt{7}\sin x-3\cos x\neq 0$ не выполнено, так как $\sqrt{7}\cdot\dfrac{3}{4}-3\cdot\dfrac{\sqrt{7}}{4}=0$

Если $x=\pi-\arcsin\dfrac{3}{4}+2\pi n, n\in Z$, *то* $\cos x=-\dfrac{\sqrt{7}}{4}$, *значит условие*

$\sqrt{7}\sin x-3\cos x\neq 0$ выполнено, так как $\sqrt{7}\cdot\dfrac{3}{4}+3\cdot\dfrac{\sqrt{7}}{4}=\dfrac{3\sqrt{7}}{2}\neq 0$

Итак, $x=\pi-\arcsin\dfrac{3}{4}+2\pi n, n\in Z.$



Б) Займёмся отбором корней из заданного промежутка:

Так как $\frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{3}{4} < \frac{\sqrt{3}}{2}$, *то* $\frac{\pi}{4} < \arcsin\frac{3}{4} < \frac{\pi}{3}$

$-\frac{\pi}{3} < -\arcsin\frac{3}{4} < -\frac{\pi}{4}$

$\frac{\pi}{2} < \frac{2\pi}{3} < \pi - \arcsin\frac{3}{4} < \frac{3\pi}{4} < \pi$

Учитывая это неравенство, получаем, что на отрезке $[\frac{\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}]$ расположены лишь два корня

$x_1 = \pi - \arcsin\frac{3}{4}$

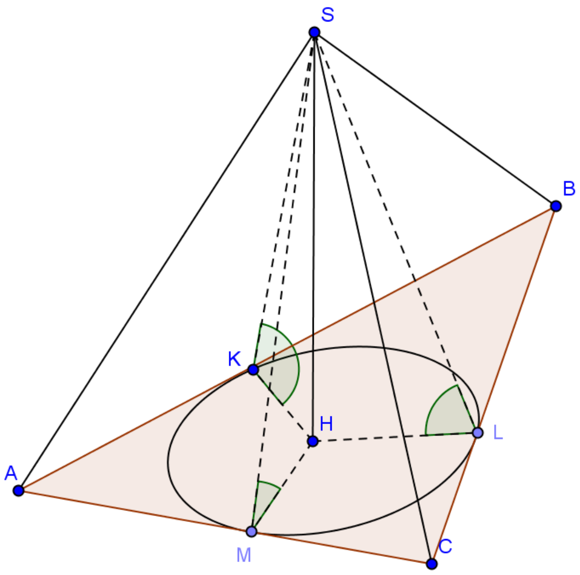
$x_2 = 3\pi - \arcsin\frac{3}{4}$

Ответ: А) $x = \pi - \arcsin\frac{3}{4} + 2\pi n, n \in Z.$

Б) $x_1 = \pi - \arcsin\frac{3}{4}$

$x_2 = 3\pi - \arcsin\frac{3}{4}$

C2. Основанием пирамиды $SABC$ с высотой SH служит прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой AB, а двугранные углы при рёбрах основания равны $\arcsin\frac{5}{13}$. Найти площадь боковой поверхности пирамиды, если $AH = 1$ и $BH = 3\sqrt{2}$.



Так как двугранные углы при рёбрах основания пирамиды равны между собой, то значит линейные углы между плоскостями боковых граней и основанием одинаковы.

Опустим из основания высоты H перпендикуляры к сторонам основания ABC.

$HK \perp AB,\ \ HM \perp AC,\ \ HL \perp BC,$ *тогда по теореме о трёх перпендикулярах* $SK \perp AB,\ \ SL \perp BC,\ \ SM \perp AC$

$\angle SKH = \angle SLH = \angle SMH = \arcsin\frac{5}{13} = \varphi -$ *линейные углы двугранных углов между плоскостями.*

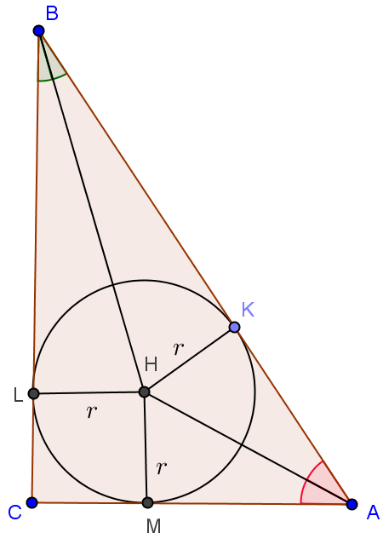
$\triangle SKH = \triangle SLH = \triangle SMH$ *по катету и острому углу* $\Rightarrow$
$HK = HL = HM \Rightarrow H -$ *центр вписанной окружности и* $SK = SL = SM$.

$$S_{бок.пов.} = \frac{1}{2} SK \cdot (AB + AC + BC).$$

$$SK = \frac{r}{\cos\varphi} = \frac{r}{\sqrt{1 - \frac{25}{169}}} = \frac{13r}{12}$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{AB + BC + AC}{2} \cdot r \Rightarrow AB + BC + AC = \frac{2S_{\triangle ABC}}{r} \Rightarrow$$

$$S_{бок.пов.} = \frac{1}{2} \cdot \frac{13r}{12} \cdot \frac{2S_{\triangle ABC}}{r} = \frac{13}{12} S_{\triangle ABC}.$$



H – *точка пересечения биссектрис* $\triangle ABC$, *тогда*

$$\angle HBA + \angle BAH = 45^\circ \Rightarrow \angle AHB = 135^\circ$$

$$AB^2 = BH^2 + AH^2 - 2 \cdot AH \cdot HB \cdot \cos 135^\circ =$$

$$= 18 + 1 + 2 \cdot 3\sqrt{2} \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 25$$

$$AB = 5$$

$$S_{\triangle ABH} = \frac{1}{2} AB \cdot HK = \frac{1}{2} AH \cdot BH \cdot \sin 135^\circ$$

$$5r = 3\sqrt{2} \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow r = \frac{3}{5}$$

$$\sin \angle KBH = \frac{\frac{3}{5}}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{5\sqrt{2}} \Rightarrow \cos \angle KBH = \frac{7}{5\sqrt{2}} = \frac{BK}{3\sqrt{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow BK = BL = \frac{21}{5} \Rightarrow BC = \frac{24}{5}$$

$$\sin \angle KAH = \frac{\frac{3}{5}}{1} = \frac{3}{5} \Rightarrow \cos \angle KAH = \frac{4}{5} = \frac{AK}{1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AK = \frac{4}{5} = AM \Rightarrow AC = \frac{7}{5}$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BC = \frac{24 \cdot 7}{2 \cdot 5 \cdot 5} \Rightarrow S_{бок.пов.} = \frac{13 \cdot 24 \cdot 7}{12 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5} = \frac{91}{25} = 3,64$$

Ответ: 3,64

С3. Решить систему неравенств: $\begin{cases} \left|1-\dfrac{|x|}{1+|x|}\right| \ge \dfrac{1}{4} \\ \dfrac{4x+15-4x^2}{\sqrt{4x+15}+2x} \ge 0 \end{cases}$.

Решим первое неравенство:

$$\left|1-\frac{|x|}{1+|x|}\right| \ge \frac{1}{4}$$

$$\left|\frac{1+|x|-|x|}{1+|x|}\right| \ge \frac{1}{4}$$

$$\left|\frac{1}{1+|x|}\right| \ge \frac{1}{4}.$$

Поскольку $\dfrac{1}{1+|x|} > 0$ *при любом* x, *то* $\dfrac{1}{1+|x|} \ge \dfrac{1}{4}$

Обе дроби имеют положительный знаменатель, значит

$$1+|x| \le 4$$

$$|x| \le 3$$

$$x \in [-3;3]$$

Решим второе неравенство системы:

$$\frac{4x+15-4x^2}{\sqrt{4x+15}+2x} \ge 0$$

$$\frac{(\sqrt{4x+15}-2x)(\sqrt{4x+15}+2x)}{\sqrt{4x+15}+2x} \ge 0$$

$$\begin{cases} \sqrt{4x+15}-2x \ge 0 \quad (1) \\ \sqrt{4x+15}+2x \ne 0 \quad (2) \end{cases}$$

$$1)\sqrt{4x+15} \ge 2x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 4x+15 \ge 0 \\ x \le 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x > 0 \\ 4x+15 \ge 4x^2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \ge -\dfrac{15}{4} \\ x \le 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x > 0 \\ 4x^2-4x-15 \le 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\dfrac{15}{4} \le x \le 0 \\ \begin{cases} x > 0 \\ (2x-5)(2x+3) \le 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\dfrac{15}{4} \le x \le 0 \\ 0 < x \le \dfrac{5}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow -\dfrac{15}{4} \le x \le \dfrac{5}{2}$$

2) $\sqrt{4x+15} \ne -2x$

Решим уравнение $\sqrt{4x+15} = -2x$

$$\begin{cases} x \le 0 \\ 4x+15 = 4x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le 0 \\ \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{3}{2} \\ x = \dfrac{5}{2} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x = -\dfrac{3}{2}$$

Значит, $x \ne -\dfrac{3}{2}$

Решение второго неравенства: $x \in [-3\dfrac{3}{4}; -\dfrac{3}{2}) \cup (-\dfrac{3}{2}; \dfrac{5}{2}]$

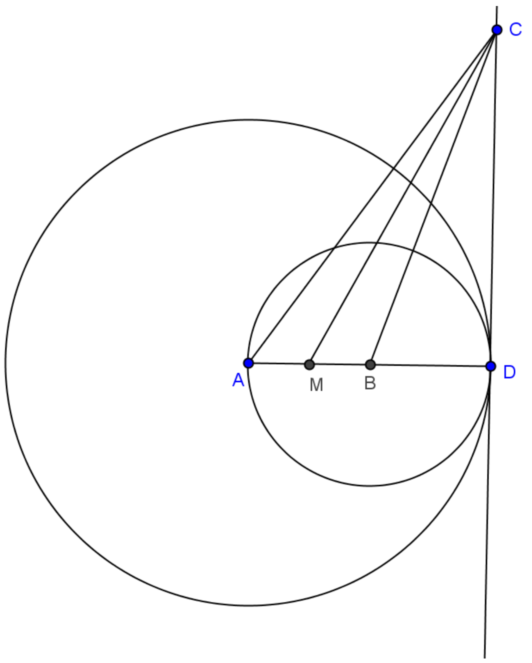
Итак, пересекая множества решений первого и второго неравенств, получаем $x \in [-3; -\dfrac{3}{2}) \cup (-\dfrac{3}{2}; \dfrac{5}{2}]$

ОТВЕТ: $[-3; -\dfrac{3}{2}) \cup (-\dfrac{3}{2}; \dfrac{5}{2}]$

С4. Две окружности с центрами A и B и радиусами 2 и 1 касаются друг друга. Точка C их общей касательной удалена от середины отрезка AB на расстояние $(1,5)^{\frac{3}{2}}$. Найти площадь треугольника ABC.

Так как в условии не сказано, каким образом касаются окружности, внешним или внутренним, то нужно рассмотреть оба случая.

Первый случай: Пусть касание окружностей внутреннее, тогда точка их касания D лежит на продолжении отрезка AB и тогда их общая касательная проходит через эту же точку D.



$$AD = 2, BD = AB = 1$$

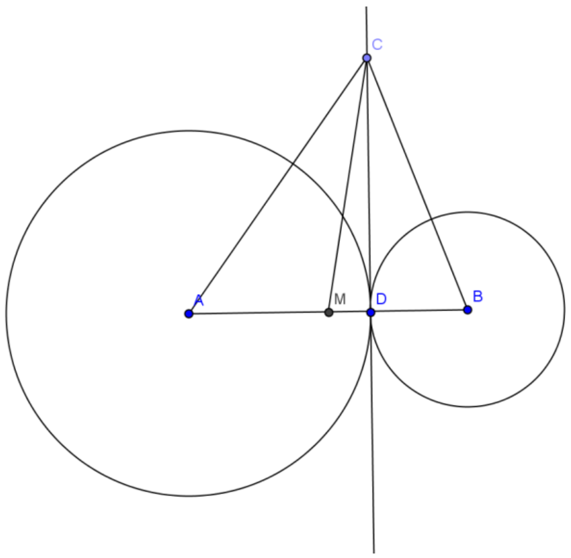
$$M - середина\ \ AB \Rightarrow MD = \frac{3}{2}$$

$$\vartriangle MCD - прямоугольный$$

$$CD = \sqrt{MC^2 - MD^2} = \sqrt{(\frac{3}{2})^3 - (\frac{3}{2})^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{9}{8}} = \frac{3}{2\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$$

$$S_{\vartriangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot CD = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{3\sqrt{2}}{4} = \frac{3\sqrt{2}}{8}$$



Пусть теперь окружности касаются внешне, тогда касательная может проходить как через точку касания окружностей, так и не проходить через неё.

Второй случай: Пусть касательная проходит через точку касания D, которая лежит на отрезке AB.

$$AB = AD + DB = 3$$

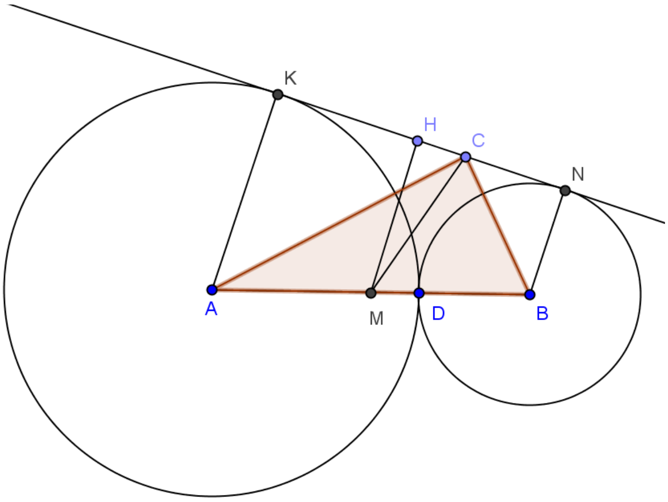
$$AM = \frac{3}{2}, DM = \frac{1}{2}$$

$$\vartriangle MDC - прямоугольный$$

$$DC = \sqrt{MC^2 - MD^2} = \sqrt{(\frac{3}{2})^3 - (\frac{1}{2})^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{27-2}{8}} = \frac{5}{2\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{4}$$

$$S_{\vartriangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot CD = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \frac{5\sqrt{2}}{4} = \frac{15\sqrt{2}}{8}$$



Третий случай : общая касательная окружностей не проходит через точку касания самих окружностей.

Тогда *ABNK*-прямоугольная трапеция с основаниями *AK=2*, *BN=1*, боковой стороной *AB=3*.

$$KN=\sqrt{AB^2-(AK-BN)^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$$

Пусть *MH*- средняя линия трапеции.

$KH=HN=\sqrt{2}$

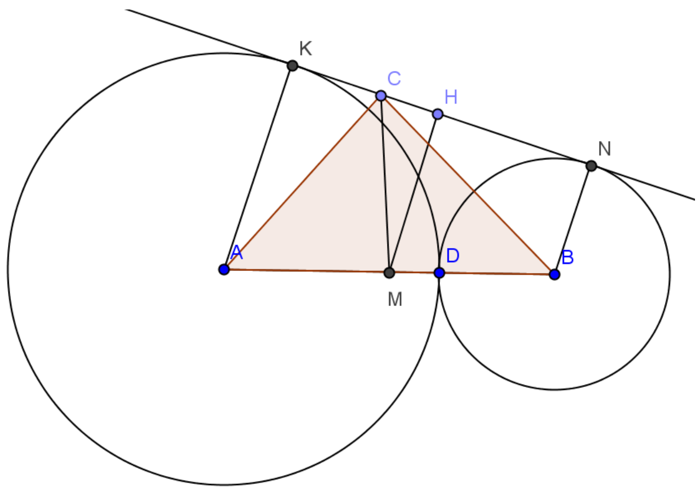
$$MH=\frac{AK+BN}{2}=\frac{3}{2}<(1,5)^{\frac{3}{2}}$$

Тогда точка C может лежать на стороне KN трапеции как справа, так и слева от точки H .

Из $\triangle HCM$ имеем $HC=\sqrt{1,5^3-1,5^2}=\frac{3}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{4}$

$$S_{\triangle ABC}=S_{ABNK}-S_{\triangle AKC}-S_{\triangle BNC}$$

$$S_{ABNK}=\frac{AK+BN}{2}\cdot KN=\frac{3}{2}\cdot 2\sqrt{2}=3\sqrt{2}$$



а)точка C справа от H

$$S_{\triangle AKC}=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot(\sqrt{2}+\frac{3\sqrt{2}}{4})=\frac{7\sqrt{2}}{4}$$

$$S_{\triangle BNC}=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot(\sqrt{2}-\frac{3\sqrt{2}}{4})=\frac{\sqrt{2}}{8}$$

$$S_{\triangle ABC}=3\sqrt{2}-\frac{7\sqrt{2}}{4}-\frac{\sqrt{2}}{8}=\frac{9\sqrt{2}}{8}$$

б)точка C слева от H

$$S_{\triangle AKC}=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot(\sqrt{2}-\frac{3\sqrt{2}}{4})=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$S_{\triangle BNC}=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot(\sqrt{2}+\frac{3\sqrt{2}}{4})=\frac{7\sqrt{2}}{8}$$

$$S_{\triangle ABC}=3\sqrt{2}-\frac{7\sqrt{2}}{8}-\frac{\sqrt{2}}{4}=\frac{15\sqrt{2}}{8}$$

Ответ: $\frac{3\sqrt{2}}{8};\frac{9\sqrt{2}}{8};\frac{15\sqrt{2}}{8}$

C5. При каких значениях параметра a система неравенств

$$\begin{cases} \dfrac{2x^2+ax+4}{x^2-x+1}>4 \\ \dfrac{2x^2+ax-6}{x^2-x+1}>-6 \end{cases}$$ не имеет решений?

$$\begin{cases} \dfrac{2x^2+ax+4}{x^2-x+1}>4 \\ \dfrac{2x^2+ax-6}{x^2-x+1}>-6 \end{cases}$$

Так как $x^2-x+1>0,$ *то можно домножить оба неравенства системы*

$$\begin{cases} 2x^2+ax+4>4(x^2-x+1) \\ 2x^2+ax-6>-6(x^2-x+1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x^2-(4+a)x<0 \\ 8x^2-(6-a)x>0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(x-\dfrac{4+a}{2})<0 \\ x(x-\dfrac{6-a}{8})>0 \end{cases}$$

Теперь нужно грамотно расположить на числовой прямой три точки.

Если $a<-4,$ *то* $\dfrac{4+a}{2}<0$

Если $a\geq -4,$ *то* $\dfrac{4+a}{2}\geq 0$

Если $a<6,$ *то* $\dfrac{6-a}{8}>0$

Если $a\geq 6,$ *то* $\dfrac{6-a}{8}\leq 0$

Теперь сравним $\dfrac{4+a}{2} \vee \dfrac{6-a}{8}$

$4(4+a)\vee 6-a$

$5a\vee -10$

$a\vee -2$

Если $a\leq -2,$ *то* $\dfrac{4+a}{2} \leq \dfrac{6-a}{8}$

Если $a>-2,$ *то* $\dfrac{4+a}{2} > \dfrac{6-a}{8}$

Итак,

1) *если* $a < -4$, *то* $\frac{4+a}{2} < 0 < \frac{6-a}{8}$

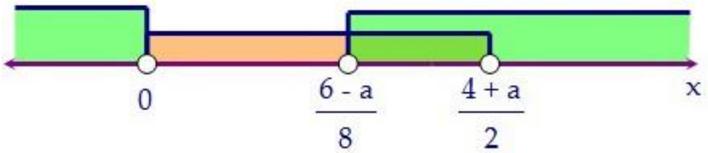
$$\begin{cases} x\left(x-\frac{4+a}{2}\right) < 0 \\ x\left(x-\frac{6-a}{8}\right) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{4+a}{2} < x < 0 \\ \left[\begin{array}{l} x < 0 \\ x > \frac{6-a}{8} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left(\frac{4+a}{2}; 0\right)$$

2) *если* $-4 \le a \le -2$, *то* $0 \le \frac{4+a}{2} \le \frac{6-a}{8}$

$$\begin{cases} x\left(x-\frac{4+a}{2}\right) < 0 \\ x\left(x-\frac{6-a}{8}\right) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < \frac{4+a}{2} \\ \left[\begin{array}{l} x < 0 \\ x > \frac{6-a}{8} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \textit{решений нет}$$

3) *если* $-2 < a < 6$, *то* $0 < \frac{6-a}{8} < \frac{4+a}{2}$

$$\begin{cases} x\left(x-\frac{4+a}{2}\right) < 0 \\ x\left(x-\frac{6-a}{8}\right) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < \frac{4+a}{2} \\ \left[\begin{array}{l} x < 0 \\ x > \frac{6-a}{8} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left(\frac{6-a}{8}; \frac{4+a}{2}\right)$$



4) *если* $a \ge 6$, *то* $\frac{6-a}{8} \le 0 < \frac{4+a}{2}$

$$\begin{cases} x\left(x-\frac{4+a}{2}\right) < 0 \\ x\left(x-\frac{6-a}{8}\right) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < \frac{4+a}{2} \\ \left[\begin{array}{l} x > 0 \\ x < \frac{6-a}{8} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left(0; \frac{4+a}{2}\right)$$

Ответ: система не имеет решений, если $a \in [-4;-2]$

С6. Проведение ЕГЭ в Занзибаре организует 100500 чиновников, каждый из которых хочет получить свою долю бюджета ЕГЭ Занзибара.
Распределение средств в Занзибаре определяется количеством волос на голове чиновника - если у чиновника m волос - он получает 1/m от бюджета.
Известно, что у Занзибарских чиновников не менее двух волосин на голове и нет двух чиновников с одинаковым количеством волос.
Можно ли распилить бюджет полностью при этих условиях?
Если да, то сколько тугриков может составлять бюджет ЕГЭ Занзибара, если самый волосатый чиновник получил 1 тугрик?
Примечание: Занзибарский тугрик является монетой неделимой, то есть доля чиновника может составлять только целое число тугриков.

Первое решение:

Поскольку в жизни ничего не бывает просто так, то, само собой, волосатость хотя бы части чиновников должна подчиняться определенному закону.

Предположим, что этот закон - геометрическая прогрессия вида $\frac{1}{a};\frac{1}{aq};\ldots\ldots\frac{1}{aq^n}$

$$S_n=\frac{\frac{1}{a}\left(\frac{1}{a^n}-1\right)}{\frac{1}{a}-1}=\frac{a^n-1}{(a-1)\cdot a^n}$$

Попробуем найти сумму, которая не зависит от n.

$$S_n=\frac{a^n-1}{(a-1)\cdot a^n}+\frac{1}{ka^n}=\frac{ka^n-k+a-1}{ka^n(a-1)}$$

При $a=k+1; S=\frac{1}{a-1}$ - не зависит от n, тогда при $a=3$ получаем $S=\frac{1}{2}$;

условие задачи будет выполнено, если $\frac{1}{2}+S=1$

Т.е. условие задачи будет выполнено для любого числа чиновников.
Получаем ответ.

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\ldots\ldots+\frac{1}{3^{100498}}+\frac{1}{2\cdot 3^{100498}}=1$$

Бюджет $2\cdot 3^{100498}$ тугриков.

Разумеется, возможны и другие варианты, но в задаче не требуется найти их все, достаточно предложить обоснованный пример.

Второе решение:

Примеры возможных распилов бюджета.

(I) Распил 2^d-бюджета. $1/2 + 1/2^2 + ... + 1/2^{100498} + 1/(3 \cdot 2^{100497}) + 1/(3 \cdot 2^{100498}) = 1$, бюджет $3 \cdot 2^{100498}$ тугриков; знаменатели дробей в левой части – количества волосин на головах занзибарских чиновников.

(II) Распил 3^d-бюджета. $1/2+1/3+1/3^2+...+1/3^{100498}+1/(2\cdot 3^{100498}) = 1$, бюджет $2\cdot 3^{100498}$ тугриков; знаменатели дробей в левой части – количества волосин на головах занзибарских чиновников.

[**Откуда есть пошли распилы.** Задачу можно сформулировать так: при $k = 100500$ найти натуральные числа $2 \leqslant n_1 < n_2 < \cdots < n_k$ такие, что

$$\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \cdots + \frac{1}{n_k} = 1, \tag{1}$$

причем, согласно примечанию о неразменном тугрике, $n_1, n_2, \ldots, n_{k-1}$ должны быть делителями n_k.

Для начала пощупаем задачу при малых k.

Легко понять, что при $k = 2$ задача (1) не имеет решений, а при $k = 3$ имеется единственное решение $(2, 3, 6)$. Но уже при $k = 4$ наши рассуждения по избытку-недостатку становятся довольно ветвистыми: я насчитал 6 решений (не уверен, что список полон):

(1) $(2, 3, 7, 42)$
(2) $(2, 3, 8, 24)$
(3) $(2, 3, 9, 18)$

(4) $(2, 3, 10, 15)$
(5) $(2, 4, 5, 20)$
(6) $(2, 4, 6, 12)$,

причем все, кроме четвертого, удовлетворяют условию неразменного тугрика. Дальше – больше. (Попробуйте, если делать нечего, разобрать случай $k = 5$). Представление вида (1) рациональных чисел аликвотными дробями (папирус Ахмеса и пр.) – мутное дело, которое, как я подозреваю, и погубило великую цивилизацию Древнего Египта. К слову, интересно сравнить этические наставления древних египтян: «не допусти, - говорится в одном из наставлений писцам, - чтобы о тебе сказали, что есть такие вещи, которых ты не знаешь» и европейцев: «господам сенаторам говорить токмо словами, а не по писанному, дабы дурь каждого всем видна была». Впрочем, чур меня, подобные отступления ныне чреваты обвинениями в оскорблении чувств мертвых.

Но не все так мрачно. Доказать, что задача (1) имеет решения $\forall k \geqslant 3$ легко, как и то, что число решений конечно.

Опишем кратко некоторые решения задачи (1).

Первое, что приходит в голову, – геометрические прогрессии. В случае прогрессии со знаменателем $1/2$ начать с $1/2$ и использовать для записи последних трех слагаемых разложение $1 = 1/2 + 1/3 + 1/6$; со знаменателем $1/3$ – начать так: $1/2 + 1/3 + 1/3^2 + 1/3^3 + \dots$ и использовать для записи последних двух слагаемых разложение $1/2 = 1/3 + 1/6$. Именно так устроены решения (6) и (3) для $k = 4$ выше. Именно так устроены примеры 1, 2 вынесенные за скобки. (Ну и головы у тамошних егэистов: у обычного человека порядка 10^5 волосин, а у ихних обиженных бюджетом — к 10^{47950} подбирается).

На поверхности также $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, тогда $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{k(k-1)} + \frac{1}{k}$ – решение задачи (1) в случае, когда k не является произведением двух последовательных натуральных чисел (во избежание повтора: все головы занзибарцев разные). Таково, по случайному совпадению, решение (6). Здесь рост бюджета - степенной, в отличие от экспоненциального в случае прогрессивных бюджетов, но это не для нас - при $k > 4$ нарушается принцип неразменного тугрика.

Ничего путного в голову не идет – заглянем к Вике. Ага, Фибоначчи, везде поспел. Номер (4) в нашем списке для $k = 4$. Все мы знаем, не дети в бункере сидят, как размножаются кролики: $F_1 = F_2 = 1$ и $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$. Используя это знание, можно доказать по индукции, что

$$\frac{1}{F_1F_3} + \frac{1}{F_2F_4} + \dots + \frac{1}{F_{k-1}F_{k+1}} + \frac{1}{F_kF_{k+1}} = 1.$$

Понятно, что принцип неразменного тугрика и здесь нарушается. Жаль, такое решение! Упертый народ эти занзибарцы.]