

## VII онлайн - турнир 29 сентября 2012 на форуме

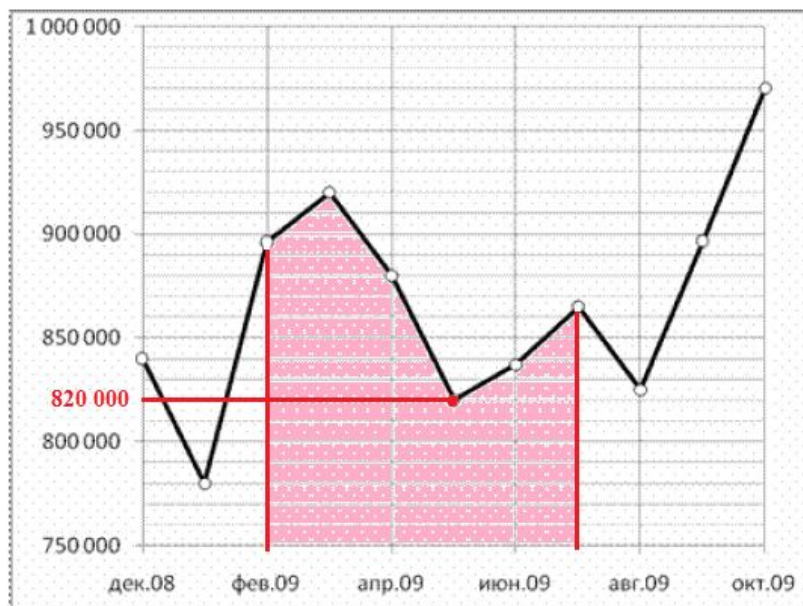
**ALEXLARIN.COM**

**В1.** В школе 1240 учеников, из них 25% — ученики начальной школы. Среди учеников средней и старшей школы 40% изучают французский язык. Сколько учеников в школе изучают французский язык, если в начальной школе французский язык не изучается?

- 1)  $100\% - 25\% = 75\%$  - ученики средней и старшей школы
- 2)  $0,75 \cdot 1240 = 930$  (чел) - ученики средней и старшей школы
- 3)  $0,4 \cdot 930 = 372$  (чел) – изучают французский язык

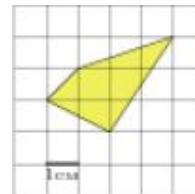
**Ответ: 372**

**В2.** На рисунке жирными точками показана средняя дневная аудитория поискового сайта Ya.ru во все месяцы с декабря 2008 по октябрь 2009 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — количество человек, посетивших сайт хотя бы раз за день (среднее за все будние дни месяца). Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку наименьшую среднюю дневную аудиторию сайта Ya.ru в период с февраля по июль 2009.



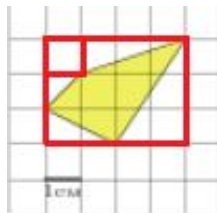
**Ответ: 820000**

**В3.** Найдите площадь четырехугольника, изображенного на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см (см. рис.). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



**Решение.**

I способ



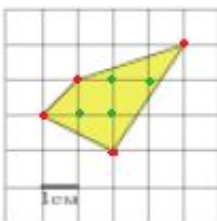
$$S_{\text{прямоуг}} = 4 \cdot 3 = 12$$

$$S_{\text{кв}} = 1 \cdot 1 = 1$$

$$S_{\text{всех треуг}} = 0,5 \cdot (1 \cdot 3 + 3 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1) = 6$$

$$S_{\text{фигуры}} = 12 - 1 - 6 = 5$$

II способ



По формуле Пика:

$$S = B + G/2 - 1,$$

где  $B$  — количество целочисленных точек внутри многоугольника, а  $G$  — количество целочисленных точек на границе многоугольника.

$$S = 4 + 4/2 - 1 = 5$$

**Ответ: 5**

**В4.** Строительный подрядчик планирует купить 15 тонн облицовочного кирпича у одного из трех поставщиков. Вес одного кирпича 5 кг. Цены и условия доставки приведены в таблице. Во сколько рублей обойдется наиболее дешевый вариант покупки?

Поставщик	Цена кирпича (руб. за шт)	Стоимость доставки (руб.)	Специальные условия
А	48	8500	Нет
Б	55	7500	Если стоимость заказа выше 150000 руб., доставка бесплатно
В	61	6000	При заказе свыше 180000 руб. доставка со скидкой 50%.

**Решение.**

$$15000 : 5 = 3000 \text{ (к)} - \text{потребуется}$$

$$\text{А: } 3000 \cdot 48 + 8500 = 152500 \text{ (руб)} - \text{наименьшее}$$

$$\text{Б: } 3000 \cdot 55 = 165000 \text{ (руб)}$$

$$\text{В: } 3000 \cdot 61 + 3000 = 186000 \text{ (руб)}$$

**Ответ: 152500**

**В5.** Решите уравнение  $\frac{x+8}{5x+7} = \frac{x+8}{7x+5}$ . Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите больший из корней.

**Решение.**

$$\frac{x+8}{5x+7} = \frac{x+8}{7x+5}$$

$$\frac{x+8}{5x+7} - \frac{x+8}{7x+5} = 0$$

$$\frac{(x+8)(7x+5-5x-7)}{(5x+7)(7x+5)} = 0$$

$$\frac{(x+8)(2x-2)}{(5x+7)(7x+5)} = 0$$

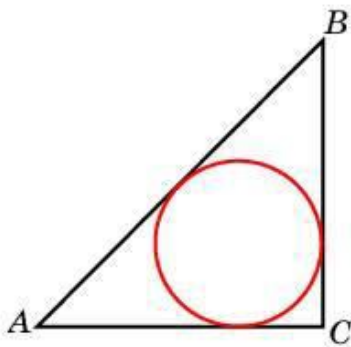
$$\begin{cases} (x+8)(2x-2) = 0 \\ (5x+7)(7x+5) \neq 0 \end{cases}$$

$x_1 = -8, x_2 = 1$  – больший корень

**Ответ: 1**

**В6.** Катеты равнобедренного прямоугольного треугольника равны  $2 + \sqrt{2}$ .  
Найдите радиус окружности, вписанной в этот треугольник.

**Решение.**



$$AB^2 = AC^2 + BC^2$$

$$AB^2 = (2 + \sqrt{2})^2 + (2 + \sqrt{2})^2 = 2(2 + \sqrt{2})^2$$

$$AB = \sqrt{2(2 + \sqrt{2})^2} = \sqrt{2}(2 + \sqrt{2}) = 2\sqrt{2} + 2$$

$$r = \frac{AC + BC - AB}{2}$$

$$r = \frac{2 + \sqrt{2} + 2 + \sqrt{2} - 2\sqrt{2} - 2}{2} = 1$$

**Ответ: 1**

**В7.** Найти значение выражения:  $\frac{24(\sin^2 107^\circ - \cos^2 107^\circ)}{3 \cos 394^\circ}$

**Решение.**

$$\begin{aligned} \frac{24(\sin^2 107^\circ - \cos^2 107^\circ)}{3 \cos 394^\circ} &= \frac{-24(\cos^2 107^\circ - \sin^2 107^\circ)}{3 \cos(360^\circ + 34^\circ)} = \frac{-8 \cos 214^\circ}{\cos 34^\circ} = \frac{-8 \cos(180^\circ + 34^\circ)}{\cos 34^\circ} = \\ &= \frac{-8(-\cos 34^\circ)}{\cos 34^\circ} = \frac{8 \cos 34^\circ}{\cos 34^\circ} = 8 \end{aligned}$$

**Ответ: 8**

**В8.** Прямая  $y = 9x - 7$  является касательной к графику функции  $y = ax^2 + 21x - 4$ .  
Найдите  $a$ .

**Решение.**

Т.к. прямая  $y = 9x - 7$  касается графика функции  $y = ax^2 + 21x - 4$ , то надо найти значение  $a$ , при котором система  $\begin{cases} y = 9x - 7, \\ y = ax^2 + 21x - 4 \end{cases}$  имеет единственное решение.

$$ax^2 + 21x - 4 = 9x - 7$$

$$ax^2 + 12x + 3 = 0$$

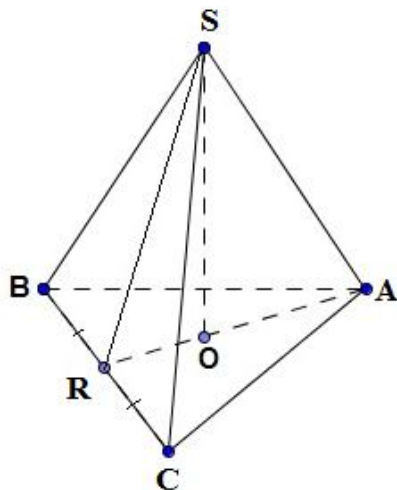
$$\frac{D}{4} = 36 - 3a = 0$$

$$36 = 3a$$

$$a = 12$$

**Ответ: 12**

**В9.** В правильной треугольной пирамиде  $SABC$ ,  $R$  — середина ребра  $BC$ ,  $S$  — вершина. Известно, что  $AB=7$ , а площадь боковой поверхности равна  $168$ . Найдите длину отрезка  $SR$ .



**Решение.**

$$S_{\text{б.п.}} = \frac{l}{2} P_{\text{осн}} \cdot l$$

$$168 = \frac{l}{2} \cdot 21 \cdot SR$$

$$SR = 168 \cdot \frac{2}{21} = 16$$

**Ответ: 16**

**В10.** Перед началом первого тура чемпионата по бадминтону участников разбивают на игровые пары случайным образом с помощью жребия. Всего в чемпионате участвует 26 бадминтонистов, среди которых 10 участников из России, в том числе Руслан Орлов. Найдите вероятность того, что в первом туре Руслан Орлов будет играть с каким-либо бадминтонистом из России?

**Решение.**

В первом туре Руслан Орлов может сыграть с  $26 - 1 = 25$  бадминтонистами, из которых 9 из России. Значит вероятность того, что в первом туре Руслан Орлов будет играть с каким-либо бадминтонистом из России, равна  $9/25 = 0,36$

**Ответ: 0,36**

**В11.** Площадь поверхности куба равна 294. Найдите его объем.

**Решение.**

$$\begin{aligned}S_{n.н.куба} &= 6a^2 \\6a^2 &= 294 \\a^2 &= 49 \\a &= 7\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}V_{куба} &= a^3 \\V_{куба} &= 7^3 = 343\end{aligned}$$

**Ответ: 343**

**В12.** Скейтбордист прыгает на стоящую на рельсах платформу, со скоростью  $v = 3$  м/с под острым углом  $\alpha$  к рельсам. От толчка платформа начинает ехать со скоростью  $u = \frac{m}{m+M}v \cos \alpha$  (м/с), где  $m = 80$  кг — масса скейтбордиста со скейтом, а  $M = 400$  кг — масса платформы. Под каким максимальным углом  $\alpha$  (в градусах) нужно прыгать, чтобы разогнать платформу не менее чем до 0,25 м/с?

**Решение.**

$$\begin{aligned}u &\geq 0,25 \\ \frac{80}{80+400} \cdot 3 \cos \alpha &\geq 0,25 \\ \frac{240}{480} \cdot \cos \alpha &\geq 0,25 \\ 0,5 \cos \alpha &\geq 0,25 \\ \cos \alpha &\geq 0,5 \\ -60^\circ + 2\pi n &\leq \alpha \leq 60^\circ + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z} \\ \text{Т.к. угол } \alpha &\text{ - острый, то} \\ \text{максимальный угол} &\text{ равен } 60^\circ\end{aligned}$$

**Ответ: 60**

**В13.** Имеется два раствора соляной кислоты в воде: первый – 40%, второй – 60%. Эти два раствора смешали, после чего добавили 5 кг чистой воды и получили 20% раствор. Если бы вместо 5 кг чистой воды добавили 5 кг 80%-го раствора, то получили бы 70%-ный раствор. Сколько килограммов 60%-го раствора было взято?

**Решение.**

Пусть масса 40% раствора  $x$  кг, а масса 60% раствора  $y$  кг. Тогда кислоты в них  $0,4x$  и  $0,6y$  кг соответственно.

По условию задачи составим систему уравнений:

$$\begin{cases} 0,2(x+y+5) = 0,4x + 0,6y \\ 0,7(x+y+5) = 0,4x + 0,6y + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(x+y+5) = 4x + 6y \\ 7(x+y+5) = 4x + 6y + 40 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+5 = 2x+3y \\ 7x+7y+35 = 4x+6y+40 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y = 5 \\ 3x+y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5-2y \\ 15-6y+y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$$

**Ответ: 2**

**В14.** Найдите наибольшее значение функции  $y = \sin^4 x + 4\sin^2 x - 3$ .

**Решение.**

$$y = \sin^4 x + 4\sin^2 x - 3 = (\sin^2 x + 2)^2 - 7$$

$$0 \leq \sin^2 x \leq 1$$

Следовательно, 1 – наибольшее значение, которое принимает  $\sin^2 x$

Значит наибольшее значение функции равно  $(1+2)^2 - 7 = 2$

**Ответ: 2**