Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

С1 Решите уравнение $(\mathrm{tg}^2 x + \mathrm{tg}\, x)\cdot\sqrt{-7\cos x} = 0$.

Решение.

Левая часть уравнения имеет смысл при $\cos x < 0$.

Получаем уравнение $\mathrm{tg}^2 x + \mathrm{tg}\, x = 0$, откуда $\mathrm{tg}\, x = 0$ или $\mathrm{tg}\, x = -1$.

Учитывая, что $\cos x < 0$, из уравнения $\mathrm{tg}\, x = 0$ получаем: $x = \pi + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$; а из уравнения $\mathrm{tg}\, x = -1$ получаем: $x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.

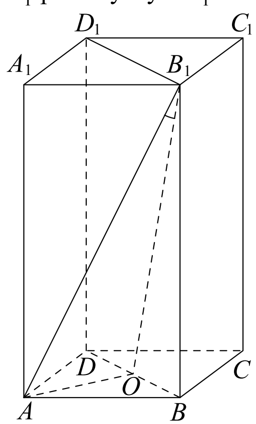
Ответ: $\pi + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z};\ \frac{3\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно найдены все значения переменной x, при которых равен нулю первый сомножитель левой части исходного уравнения. Возможно отбор найденных значений или не произведён, или произведён неверно	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

С2 В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$, стороны основания которой равны 4, а боковые рёбра равны 8, найдите угол между прямой AB_1 и плоскостью BDD_1.

Решение.

Пусть O — середина отрезка BD. Отрезок AO является перпендикуляром, опущенным из точки A на плоскость BDD_1. Угол между прямой AB_1 и плоскостью BDD_1 равен углу AB_1O.



В прямоугольном треугольнике AB_1O $AO = 2\sqrt{2}$, $AB_1 = 4\sqrt{5}$.

Следовательно, $\sin\angle AB_1O = \frac{\sqrt{10}}{10}$.

Ответ: $\arcsin\frac{\sqrt{10}}{10}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Способ нахождения искомого угла верный, но получен неверный ответ или решение не закончено	1
Решение не удовлетворяет ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

С3 Решите неравенство $\log_{\frac{1}{49}}(26-5x)\cdot\log_{6-x}\frac{1}{7} \ge 1$.

Решение.

Решение будем искать при условиях:

$$\begin{cases} 26-5x>0, \\ 6-x>0, \\ 6-x\ne 1, \end{cases}$$

откуда $x \in (-\infty;\ 5)\cup\left(5;\ \frac{26}{5}\right)$. Для таких x получаем:

$$\frac{\log_{\frac{1}{49}}(26-5x)}{\log_{\frac{1}{7}}(6-x)} = \frac{\log_{\frac{1}{7}}(26-5x)}{2\log_{\frac{1}{7}}(6-x)} = \frac{\log_{\frac{1}{7}}(26-5x)}{\log_{\frac{1}{7}}(6-x)^2}.$$

Исходное неравенство примет вид: $\frac{\log_{\frac{1}{7}}(26-5x)}{\log_{\frac{1}{7}}(6-x)^2} \ge 1$.

Рассмотрим исходное неравенство при $x \in (-\infty;\ 5)$, тогда $(6-x)^2 > 1$, откуда $\log_{\frac{1}{7}}(6-x)^2 < 0$, поэтому

$$\log_{\frac{1}{7}}(26-5x) \le \log_{\frac{1}{7}}(6-x)^2;\ 26-5x \ge 36-12x+x^2;\ (x-2)(x-5)\le 0;$$

$$2 \le x \le 5,$$

откуда $x \in [2;\ 5)$.

Рассмотрим исходное неравенство при $x \in \left(5;\ \frac{26}{5}\right)$, тогда $(6-x)^2 < 1$, откуда $\log_{\frac{1}{7}}(6-x)^2 > 0$, поэтому

$$\log_{\frac{1}{7}}(26-5x) \ge \log_{\frac{1}{7}}(6-x)^2;\ 26-5x \le 36-12x+x^2;\ (x-2)(x-5) \ge 0;$$

$$x \le 2,\ x \ge 5,$$

откуда $x \in \left(5;\ \frac{26}{5}\right)$.

Ответ: $[2;\ 5);\ \left(5;\ \frac{26}{5}\right)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного конечным количеством значений переменной, при которых определена левая часть исходного неравенства	2
Решение содержит верный переход от исходного неравенства к рациональным неравенствам или верно найдены все значения переменной, при которых определена левая часть исходного неравенства	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

C4

Через вершину B правильного шестиугольника $ABCDEF$ проведена прямая, пересекающая диагональ CF в точке K. Известно, что эта прямая разбивает шестиугольник на части, площади которых относятся как $2:3$. Найдите отношение $CK:KF$.

Решение.

Пусть O — центр правильного шестиугольника $ABCDEF$, S — его площадь. Тогда

$$S_{ABEF} = S_{BCDE} = \frac{1}{2}S;\ S_{ABF} = S_{BCD} = \frac{1}{6}S.$$

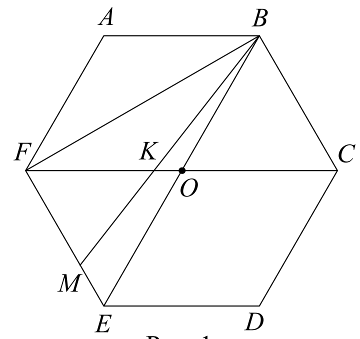


Рис. 1

Рассмотрим случай, когда точка K расположена между точками O и F (рис. 1). Тогда прямая BK пересекает сторону EF в некоторой точке M, причём

$$S_{ABMF} = \frac{2}{5}S;\ S_{BMF} = S_{ABMF} - S_{ABF} = \frac{7}{30}S;$$

$$S_{BME} = S_{ABEF} - S_{ABMF} = \frac{1}{10}S.$$

Площади треугольников BME и BMF относятся как $3:7$, поэтому M делит EF в отношении $3:7$. Треугольник BKC подобен треугольнику MKF с коэффициентом $\frac{10}{7}$ $\left(FM \parallel BC;\ BC = EF = \frac{10}{7}MF\right)$, следовательно, $\frac{CK}{KF} = \frac{10}{7}$.

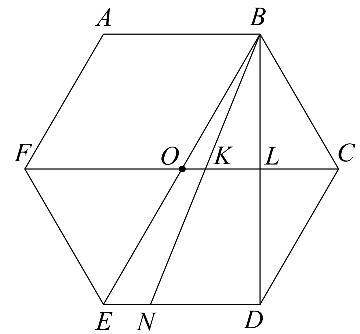


Рис. 2

Пусть теперь точка K лежит между C и O (рис. 2). Тогда прямая BK пересекает сторону DE в некоторой точке N, причём

$$S_{BCDE}=\frac{1}{2}S;\ S_{BCDN}=\frac{2}{5}S;\ S_{BCD}=\frac{1}{6}S;$$

$$S_{BND}=S_{BCDN}-S_{BCD}=\frac{7}{30}S;$$

$$S_{BNE}=S_{BCDE}-S_{BCDN}=\frac{1}{2}S-\frac{2}{5}S=\frac{1}{10}S.$$

Площади треугольников BNE и BND относятся как $3:7$, поэтому N делит DE в отношении $3:7$.

Пусть диагонали CF и BD пересекаются в точке L. Тогда L — середина OC, OL — средняя линия треугольника BDE, а так как N делит отрезок DE в отношении $3:7$, то K делит отрезок OL в том же отношении. Обозначим $OK=3z$. Тогда

$$KL=7z;\ CL=OL=10z;\ CK=CL+LK=17z;$$

$$OF=OC=2CL=20z;\ KF=OK+OF=23z.$$

Следовательно, $\frac{CK}{KF}=\frac{17}{23}$.

Ответ: $\frac{10}{7}$ или $\frac{17}{23}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, для которой получено правильное значение искомой величины	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, для которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

C5 Найдите все значения a, при каждом из которых система

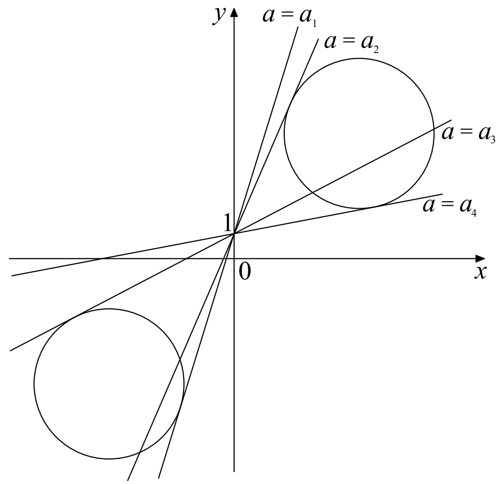
$$\begin{cases}\left(|x|-5\right)^2+\left(|y|-5\right)^2=9,\\ y=ax+1,\\ xy>0\end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение.

Первое уравнение при условии $xy>0$ задаёт на плоскости две окружности радиуса 3 с центрами $(5;5)$ и $(-5;-5)$, а второе — прямую l с угловым коэффициентом a, проходящую через точку $(0;1)$ (см. рис.).

© 2011 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации
Копирование **не допускается**



Прямая l касается окружности с центром в точке $(-5;-5)$ радиуса 3 тогда и только тогда, когда система

$$\begin{cases}y=ax+1,\\ (x+5)^2+(y+5)^2=9\end{cases}\qquad(1)$$

имеет единственное решение. Для этого необходимо, чтобы квадратное уравнение

$$(x+5)^2+(ax+1+5)^2=9$$

имело единственное решение. Приведём уравнение к виду

$$\left(a^2+1\right)x^2+2(6a+5)+52=0$$

и из равенства нулю дискриминанта получим:

$$(6a+5)^2-52\left(a^2+1\right)=0,$$

откуда $16a^2-60a+27=0$.

Значит, $a_1=\frac{15+\sqrt{117}}{8}$, $a_3=\frac{15-\sqrt{117}}{8}$. Система (1) имеет решения только при $\frac{15-\sqrt{117}}{8}\le a\le\frac{15+\sqrt{117}}{8}$.

Аналогично, прямая l касается окружности с центром в точке $(5;5)$ радиуса 3 тогда и только тогда, когда система

$$\begin{cases}y=ax+1,\\ (x-5)^2+(y-5)^2=9\end{cases}\qquad(2)$$

имеет единственное решение. Для этого необходимо, чтобы квадратное уравнение

$$(x-5)^2+(ax+1-5)^2=9$$

© 2011 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации
Копирование **не допускается**

имело единственное решение. Приведём уравнение к виду

$$\left(a^2+1\right)x^2-2\left(4a+5\right)+32=0$$

и из равенства нулю дискриминанта получим:

$$\left(4a+5\right)^2-32\left(a^2+1\right)=0,$$

откуда $16a^2-40a+7=0$.

Значит, $a_2=\dfrac{5+3\sqrt{2}}{4}$, $a_4=\dfrac{5-3\sqrt{2}}{4}$. Система (2) имеет решения только при $\dfrac{5-3\sqrt{2}}{4}\le a\le\dfrac{5+3\sqrt{2}}{4}$.

Так как $\dfrac{5-3\sqrt{2}}{4}<\dfrac{15-\sqrt{117}}{8}<\dfrac{5+3\sqrt{2}}{4}<\dfrac{15+\sqrt{117}}{8}$, в ответ попадают только $a_4=\dfrac{5-3\sqrt{2}}{4}$ и $a_1=\dfrac{15+\sqrt{117}}{8}$.

Ответ: $\dfrac{5-3\sqrt{2}}{4}$, $\dfrac{15+3\sqrt{13}}{8}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены верные значения параметра, но – или в ответ включено также и одно-два неверных значений; – или решение недостаточно обосновано	3
С помощью верного рассуждения получено хотя бы одно верное значение параметра	2
Задача сведена к исследованию: – или взаимного расположения окружностей и прямой; – или квадратных уравнений с параметром	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

C6 Набор состоит из тридцати девяти натуральных чисел, среди которых есть числа 3, 4 и 6. Среднее арифметическое любого тридцати одного числа этого набора меньше 2.
а) Может ли такой набор содержать ровно шестнадцать единиц?
б) Может ли такой набор содержать менее шестнадцати единиц?
в) Докажите, что в любом таком наборе есть несколько чисел, сумма которых равна 32.

© 2011 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации
Копирование **не допускается**

Решение.

а) Да, может. Например, сумма любого тридцати одного числа из набора $6,\ 4,\ 3,\ \underbrace{2,\ \ldots,\ 2}_{20},\ \underbrace{1,\ \ldots,\ 1}_{16}$ не больше, чем $6+4+3+2\cdot 20+8=61$, и их среднее арифметическое меньше 2.

б) Нет, не может. Выпишем все числа слева направо в порядке убывания и рассмотрим 31 число, считая слева. Их сумма S меньше 62. Пусть количество единиц среди них равно x. Тогда

$$61\ge S\ge x+2(28-x)+3+4+6;\ x\ge 8,$$

то есть среди выбранного 31 числа всегда есть восемь единиц. Каждое из оставшихся восьми чисел равно 1, и поэтому во всём наборе есть как минимум шестнадцать единиц.

в) Используя шестнадцать единиц и числа 3, 4, 6, можно составить все суммы от 1 до 29.

Если среди оставшихся двадцати чисел есть число от 3 до 31, то его можно добавить и получить в сумме 32.

Если среди оставшихся двадцати чисел нет чисел от 3 до 31, то каждое из них или равно 1, или равно 2, или больше 31. Так как сумма этих двадцати чисел не больше 61, то только одно из чисел может быть больше 31. Значит, в этом случае как минимум девятнадцать чисел равны 1 или 2. Используя их и шестнадцать единиц, всегда можно получить сумму, равную 32.
Ответ: а) да, б) нет.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
Решение в целом верное, содержит: – или верный пример для п. а) и обоснованное выполнение п. в); – или верный пример для п. а), обоснованное выполнение п. б), а ход доказательства п. в) в целом верный, но содержит легко устранимые неточности	3
Решение содержит: – или верный пример для п. а) и обоснованное выполнение п. б); – или обоснованное выполнение п. в) (при не выполненных п. а) и п. б)	2
Решение содержит: – или верный пример для п. а); – или обоснованное выполнение п. б)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

© 2011 Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации
Копирование **не допускается**