Решения и критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

C1 а) Решите уравнение $16^{\sin x - 0{,}25} - 3\cdot 4^{\sin x - 0{,}5} + 1 = 0$.

б) Укажите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$.

Решение.

а) Умножим обе части уравнения на 2: $16^{\sin x} - 3\cdot 4^{\sin x} + 2 = 0$.

Сделаем замену $y = 4^{\sin x}$. Получаем квадратное уравнение $y^2 - 3y + 2 = 0$. Корни: $y = 1$ и $y = 2$.

Из уравнения $4^{\sin x} = 1$ находим: $\sin x = 0$, откуда $x = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

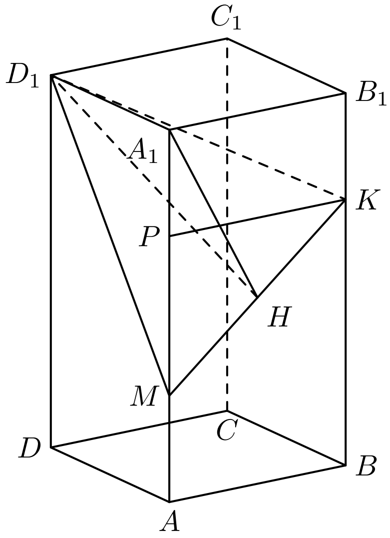
Из уравнения $4^{\sin x} = 2$ находим: $\sin x = \frac{1}{2}$, откуда $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi l$, $l \in \mathbb{Z}$; $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$.

б) С помощью числовой окружности находим, что отрезку $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$ принадлежат корни 2π, $\frac{13\pi}{6}$, $\frac{17\pi}{6}$ и 3π.

Ответ: а) πk, $k \in \mathbb{Z}$; $\frac{5\pi}{6} + 2\pi l$, $l \in \mathbb{Z}$; $\frac{\pi}{6} + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$; б) 2π, $\frac{13\pi}{6}$, $\frac{17\pi}{6}$, 3π.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или в пункте *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

C2 В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ со стороной основания 4 и высотой 7 на ребре AA_1 взята точка M так, что $AM = 2$. На ребре BB_1 взята точка K так, что $B_1K = 2$. Найдите угол между плоскостью D_1MK и плоскостью CC_1D_1.



Решение.

Заменим плоскость CC_1D_1 параллельной ей плоскостью ABB_1. Из точки A_1 проведём перпендикуляр A_1H к прямой MK. Он является проекцией отрезка D_1H на плоскость ABB_1. Следовательно, $\angle A_1HD_1$ — линейный угол двугранного угла, образованного плоскостями D_1MK и ABB_1.

Опустим перпендикуляр KP на прямую AA_1. $PM = 3$, $KP = 4$, значит, $MK = 5$. В прямоугольном треугольнике A_1HM гипотенуза A_1M также равна 5. Значит, треугольники A_1HM и KPM равны по гипотенузе и общему острому углу M. Поэтому $A_1H = KP = 4$.

В прямоугольном треугольнике D_1A_1H катеты равны, следовательно, $\angle A_1HD_1$ равен $45°$.

Ответ: $45°$.

Содержание критерия	**Баллы**
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит обоснованный переход к планиметрической задаче, но получен неверный ответ или решение не закончено, или при правильном ответе решение недостаточно обосновано	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

C3 Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \log_x \left(\log_2 x + \log_4 x + 1\right) \geq \dfrac{1}{\log_2 x}, \\ 3^x + 3^{x+1} > 4^x. \end{cases}$$

Решение.

Решим первое неравенство системы:

$$\log_x\left(\frac{3}{2}\log_2 x+1\right)\geq \log_x 2.$$

При $x>1$ получаем:

$$\frac{3}{2}\log_2 x+1\geq 2;\ \log_2 x\geq \frac{2}{3},$$

откуда $x\geq 2^{\frac{2}{3}}$. Все решения последнего неравенства удовлетворяют условию $x>1$.

При $0<x<1$ получаем:

$$0<\frac{3}{2}\log_2 x+1\leq 2;\ -\frac{2}{3}<\log_2 x\leq \frac{2}{3},$$

откуда $2^{-\frac{2}{3}}<x\leq 2^{\frac{2}{3}}$. Учитывая условие $0<x<1$, получаем $2^{-\frac{2}{3}}<x<1$.

Решение первого неравенства системы $\left(2^{-\frac{2}{3}};\,1\right);\ \left[2^{\frac{2}{3}};\,+\infty\right)$.

Решим второе неравенство системы:

$$4\cdot 3^x>4^x;\ 4>\left(\frac{4}{3}\right)^x;\ x<\log_{\frac{4}{3}}4.$$

Поскольку $\log_{\frac{4}{3}}4>2>2^{\frac{2}{3}}$, получаем решение исходной системы неравенств: $\left(2^{-\frac{2}{3}};\,1\right);\ \left[2^{\frac{2}{3}};\,\log_{\frac{4}{3}}4\right)$.

Ответ: $\left(2^{-\frac{2}{3}};\,1\right);\ \left[2^{\frac{2}{3}};\,\log_{\frac{4}{3}}4\right)$.

Содержание критерия	**Баллы**
Обоснованно получен верный ответ	3
Обоснованно получены верные ответы в обоих неравенствах	2
Обоснованно получен верный ответ в одном неравенстве системы неравенств	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

C4 Расстояние между двумя параллельными прямыми равно 24. На одной из них взята точка C, а на другой взяты точки A и B так, что треугольник ABC — остроугольный равнобедренный, и его боковая сторона равна 25. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC.

Решение.

Опустим из точки C перпендикуляр CH на прямую AB. Длина перпендикуляра равна 24. Возможны два случая.

Первый случай (рис. 1): $AC=CB=25$. Тогда из прямоугольного треугольника AHC находим: $AH=\sqrt{25^2-24^2}=7$. Следовательно, $AB=14$. Площадь треугольника ABC равна $\frac{1}{2}\cdot AB\cdot CH=\frac{1}{2}\cdot 14\cdot 24=168$.

Радиус описанной окружности равен

$$\frac{AB\cdot BC\cdot AC}{4S_{ABC}}=\frac{25\cdot 25\cdot 14}{4\cdot 168}=\frac{625}{48}.$$

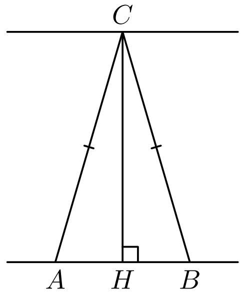


Рис. 1

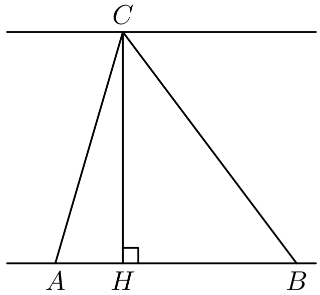


Рис. 2

Второй случай (рис. 2): одна из боковых сторон — сторона AB. Пусть, для определённости, $AB=AC=25$. Тогда из прямоугольного треугольника AHC находим: $AH=\sqrt{25^2-24^2}=7$. Поскольку треугольник ABC остроугольный, точка H лежит на стороне AB, поэтому $HB=25-7=18$. Из прямоугольного треугольника BHC находим: $BC=\sqrt{18^2+24^2}=30$. Площадь треугольника ABC равна $\frac{1}{2}\cdot AB\cdot CH=\frac{1}{2}\cdot 25\cdot 24=300$.

Радиус описанной окружности равен

$$\frac{AB\cdot BC\cdot AC}{4S_{ABC}}=\frac{25\cdot 30\cdot 25}{4\cdot 300}=\frac{125}{8}.$$

Ответ: $\frac{625}{48}$ или $\frac{125}{8}$.

Содержание критерия	Баллы
Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации, и получен правильный ответ	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная конфигурация, для которой получено правильное значение искомой величины	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, в которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

C5 При каких значениях a уравнение $\left|x+a^2\right|=\left|a+x^2\right|$ имеет ровно три корня?

Решение.

Каждый корень уравнения $\left|x+a^2\right|=\left|a+x^2\right|$ является корнем уравнения $x+a^2=a+x^2$ или корнем уравнения $-x-a^2=a+x^2$.

Уравнение $x+a^2=a+x^2$ имеет корни: $x=a$ и $x=1-a$. При $a=\frac{1}{2}$ эти корни совпадают.

Уравнение $-x-a^2=a+x^2$ равносильно квадратному уравнению $x^2+x+a^2+a=0$. Дискриминант этого уравнения равен $1-4a^2-4a$, поэтому уравнение имеет два корня при $\frac{-\sqrt{2}-1}{2}<a<\frac{\sqrt{2}-1}{2}$, один корень при $a=\frac{-\sqrt{2}-1}{2}$ и $a=\frac{\sqrt{2}-1}{2}$, а иначе не имеет корней.

Уравнения $x+a^2=a+x^2$ и $-x-a^2=a+x^2$ имеют общий корень, только если для этого корня верно $x+a^2=a+x^2=0$. В этом случае $x=-a^2$ и $a^4+a=0$; $a\,(a+1)\left(a^2-a+1\right)=0$. При $a=0$ исходное уравнение имеет три корня: $x=-1$, $x=0$ и $x=1$. При $a=-1$ исходное уравнение имеет три корня: $x=-1$, $x=0$ и $x=2$.

Таким образом, исходное уравнение имеет ровно три корня при $a=\dfrac{-\sqrt{2}-1}{2}$, $a=-1$, $a=0$ и $a=\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$.

Ответ: $a=\dfrac{-\sqrt{2}-1}{2}$, $a=-1$, $a=0$, $a=\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$.

Содержание критерия	**Баллы**
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены все верные значения параметра, но – или в ответ включены также и одно-два неверных значения; – или решение недостаточно обосновано	3
С помощью верного рассуждения получено хотя бы два верных значения параметра	2
С помощью верного рассуждения получено хотя бы одно верное значение параметра	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

C6 Дана последовательность натуральных чисел, причём каждый следующий член отличается от предыдущего либо на 10, либо в 7 раз. Сумма всех членов последовательности равна 163.

а) Какое наименьшее число членов может быть в этой последовательности?

б) Какое наибольшее число членов может быть в этой последовательности?

Решение.

а) Последовательность не может состоять из двух чисел. Действительно, если два числа отличаются либо на 10, либо в 7 раз, то эти числа одной чётности и их сумма чётна, а 163 — нечётное число.

Последовательность может состоять из трёх чисел. Например, для чисел 27, 17 и 119 верно $27+17+119=163$.

б) Заметим, что сумма двух соседних членов последовательности не меньше $8=1+7$. Значит, последовательность не может состоять из 42 или более чисел, поскольку $\frac{42}{2}\cdot 8=168>163$.

Сумма двух соседних членов последовательности равна 8 только тогда, когда эти числа равны 1 и 7, иначе их сумма не меньше $12=1+11$. Если последовательность состоит из 41 числа, то либо эта последовательность состоит только из 1 и 7, либо в этой последовательности есть пара соседних членов, сумма которых 12 или больше. В первом случае сумма всех членов последовательности равна 161 или 167. Во втором случае помимо пары соседних членов последовательности, сумма которых 12 или больше, найдётся ещё 19 пар соседних членов последовательности, сумма которых 8 или больше, значит, сумма всех членов последовательности не меньше $164=12+19\cdot 8$. Таким образом, последовательность не может состоять из 41 числа.

Любые два соседних члена последовательности одной чётности. Значит, последовательность не может состоять из чётного количества членов, поскольку в этом случае её сумма чётна. В частности, последовательность не может состоять из 40 чисел.

Последовательность может состоять из 39 чисел. Например, для 39 чисел 11, 1, 7, 1, 7, ... верно $11+19\cdot(1+7)=163$.

Ответ: а) 3; б) 39.

Содержание критерия	**Баллы**
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	4
Получены три из нижеперечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Получены два из нижеперечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Получен один из следующих результатов: – верно выполнен пункт a; – доказано, что в последовательности менее 42 членов; – доказано, что последовательность не может состоять из 40 и 41 числа; – приведён пример последовательности, состоящей из 39 чисел	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Решения и критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

C1 а) Решите уравнение $\sin 2x + \cos\left(x - \dfrac{3\pi}{2}\right) = 0$.

б) Укажите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\dfrac{5\pi}{2}; -\pi\right]$.

Решение.

а) Преобразуем уравнение:

$$2\sin x\cos x - \sin x = 0; \sin x \cdot (2\cos x - 1) = 0.$$

Из уравнения $\sin x = 0$ находим: $x = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

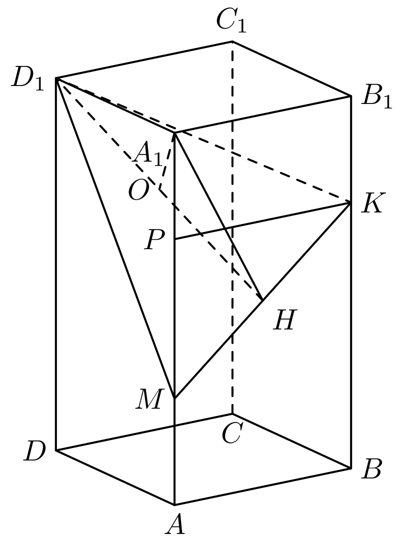
Из уравнения $2\cos x - 1 = 0$ находим: $\cos x = \dfrac{1}{2}$, откуда $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

б) С помощью числовой окружности находим, что отрезку $\left[-\dfrac{5\pi}{2}; -\pi\right]$ принадлежат корни $-\dfrac{7\pi}{3}$, -2π, $-\dfrac{5\pi}{3}$ и $-\pi$.

Ответ: а) πk, $k \in \mathbb{Z}$; $\pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; б) $-\dfrac{7\pi}{3}$, -2π, $-\dfrac{5\pi}{3}$, $-\pi$.

Содержание критерия	**Баллы**
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или в пункте *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

C2 В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ со стороной основания 4 и высотой 7 на ребре AA_1 взята точка M так, что $AM = 2$. На ребре BB_1 взята точка K так, что $B_1K = 2$. Найдите расстояние от точки A_1 до плоскости D_1MK.



Решение.

Из точки A_1 проведём перпендикуляр A_1H к прямой MK и перпендикуляр A_1O к плоскости D_1MK. Точка O лежит на гипотенузе D_1H прямоугольного треугольника D_1A_1H, поэтому отрезок A_1O — высота этого треугольника.

Опустим перпендикуляр KP на прямую AA_1. $PM = 3$, $KP = 4$, значит, $MK = 5$. В прямоугольном треугольнике A_1HM гипотенуза A_1M также равна 5. Значит, треугольники A_1HM и KPM равны по гипотенузе и общему острому углу M. Поэтому $A_1H = KP = 4$.

В прямоугольном треугольнике D_1A_1H катеты равны, следовательно, $A_1O = A_1H \cdot \sin 45^\circ = 2\sqrt{2}$.

Ответ: $2\sqrt{2}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит обоснованный переход к планиметрической задаче, но получен неверный ответ или решение не закончено, или при правильном ответе решение недостаточно обосновано	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

C3 Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \log_x (\log_3 x + \log_9 x + 2) \geq \dfrac{1}{\log_3 x}, \\ 4^x + 4^{x+1} > 5^x. \end{cases}$$

Решение.

Решим первое неравенство системы:

$$\log_x\left(\frac{3}{2}\log_3 x+2\right)\geq\log_x 3.$$

При $x>1$ получаем:

$$\frac{3}{2}\log_3 x+2\geq 3;\ \log_3 x\geq\frac{2}{3},$$

откуда $x\geq 3^{\frac{2}{3}}$. Все решения последнего неравенства удовлетворяют условию $x>1$.

При $0<x<1$ получаем:

$$0<\frac{3}{2}\log_3 x+2\leq 3;\ -\frac{4}{3}<\log_3 x\leq\frac{2}{3},$$

откуда $3^{-\frac{4}{3}}<x\leq 3^{\frac{2}{3}}$. Учитывая условие $0<x<1$, получаем $3^{-\frac{4}{3}}<x<1$.

Решение первого неравенства системы $\left(3^{-\frac{4}{3}};\,1\right)$; $\left[3^{\frac{2}{3}};\,+\infty\right)$.

Решим второе неравенство системы:

$$5\cdot 4^x>5^x;\ 5>\left(\frac{5}{4}\right)^x;\ x<\log_{\frac{5}{4}}5.$$

Поскольку $\log_{\frac{5}{4}}5>3>3^{\frac{2}{3}}$, получаем решение исходной системы неравенств: $\left(3^{-\frac{4}{3}};\,1\right)$; $\left[3^{\frac{2}{3}};\,\log_{\frac{5}{4}}5\right)$.

Ответ: $\left(3^{-\frac{4}{3}};\,1\right)$; $\left[3^{\frac{2}{3}};\,\log_{\frac{5}{4}}5\right)$.

Содержание критерия	**Баллы**
Обоснованно получен верный ответ	3
Обоснованно получены верные ответы в обоих неравенствах	2
Обоснованно получен верный ответ в одном неравенстве системы неравенств	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

C4 Расстояние между двумя параллельными прямыми равно 12. На одной из них взята точка C, а на другой взяты точки A и B так, что треугольник ABC — остроугольный равнобедренный, и его боковая сторона равна 13. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC.

Решение.

Опустим из точки C перпендикуляр CH на прямую AB. Длина перпендикуляра равна 12. Возможны два случая.

Первый случай (рис. 1): $AC = CB = 13$. Тогда из прямоугольного треугольника AHC находим: $AH = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5$. Следовательно, $AB = 10$. Площадь треугольника ABC равна $\frac{1}{2} \cdot AB \cdot CH = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 12 = 60$.

Радиус описанной окружности равен

$$\frac{AB \cdot BC \cdot AC}{4S_{ABC}} = \frac{13 \cdot 13 \cdot 10}{4 \cdot 60} = \frac{169}{24}.$$

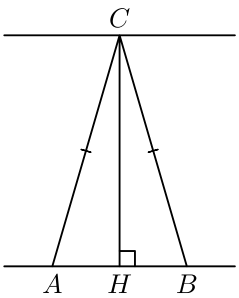


Рис. 1

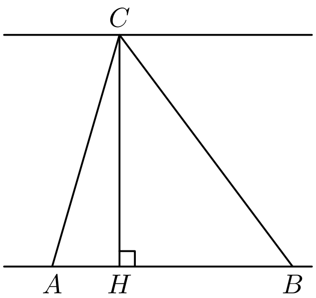


Рис. 2

Второй случай (рис. 2): одна из боковых сторон — сторона AB. Пусть, для определённости, $AB = AC = 13$. Тогда из прямоугольного треугольника AHC находим: $AH = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5$. Поскольку треугольник ABC остроугольный, точка H лежит на стороне AB, поэтому $HB = 13 - 5 = 8$. Из прямоугольного треугольника BHC находим: $BC = \sqrt{8^2 + 12^2} = 4\sqrt{13}$. Площадь треугольника ABC равна $\frac{1}{2} \cdot AB \cdot CH = \frac{1}{2} \cdot 13 \cdot 12 = 78$.

Радиус описанной окружности равен

$$\frac{AB\cdot BC\cdot AC}{4S_{ABC}}=\frac{13\cdot 13\cdot 4\sqrt{13}}{4\cdot 78}=\frac{13\sqrt{13}}{6}.$$

Ответ: $\frac{169}{24}$ или $\frac{13\sqrt{13}}{6}$.

Содержание критерия	**Баллы**
Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации, и получен правильный ответ	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная конфигурация, для которой получено правильное значение искомой величины	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, в которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

C5 При каких значениях a уравнение $|x+a^2|=|x^2-a|$ имеет ровно три корня?

Решение.

Каждый корень уравнения $\left|x+a^2\right|=\left|x^2-a\right|$ является корнем уравнения $x+a^2=x^2-a$ или корнем уравнения $-x-a^2=x^2-a$.

Уравнение $x+a^2=x^2-a$ имеет корни: $x=-a$ и $x=1+a$. При $a=-\frac{1}{2}$ эти корни совпадают.

Уравнение $-x-a^2=x^2-a$ равносильно квадратному уравнению $x^2+x+a^2-a=0$. Дискриминант этого уравнения равен $1-4a^2+4a$, поэтому уравнение имеет два корня при $\frac{1-\sqrt{2}}{2}<a<\frac{\sqrt{2}+1}{2}$, один корень при $a=\frac{1-\sqrt{2}}{2}$ и $a=\frac{\sqrt{2}+1}{2}$, а иначе не имеет корней.

Уравнения $x+a^2=x^2-a$ и $-x-a^2=x^2-a$ имеют общий корень, только если для этого корня верно $x+a^2=x^2-a=0$. В этом случае $x=-a^2$ и $a^4-a=0$; $a\,(a-1)\,\left(a^2+a+1\right)=0$. При $a=0$ исходное уравнение имеет три корня: $x=-1$, $x=0$ и $x=1$. При $a=1$ исходное уравнение имеет три корня: $x=-1$, $x=0$ и $x=2$.

Таким образом, исходное уравнение имеет ровно три корня при $a=\dfrac{1-\sqrt{2}}{2}$, $a=0$, $a=1$ и $a=\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}$.

Ответ: $a=\dfrac{1-\sqrt{2}}{2}$, $a=0$, $a=1$, $a=\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}$.

Содержание критерия	**Баллы**
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены все верные значения параметра, но – или в ответ включены также и одно-два неверных значения; – или решение недостаточно обосновано	3
С помощью верного рассуждения получено хотя бы два верных значения параметра	2
С помощью верного рассуждения получено хотя бы одно верное значение параметра	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

C6 Дана последовательность натуральных чисел, причём каждый следующий член отличается от предыдущего либо на 16, либо в 9 раз. Сумма всех членов последовательности равна 137.

а) Какое наименьшее число членов может быть в этой последовательности?

б) Какое наибольшее число членов может быть в этой последовательности?

Решение.

а) Последовательность не может состоять из двух чисел. Действительно, если два числа отличаются либо на 16, либо в 9 раз, то эти числа одной чётности и их сумма чётна, а 137 — нечётное число.

Последовательность может состоять из трёх чисел. Например, для чисел 27, 11 и 99 верно $27+11+99=137$.

б) Заметим, что сумма двух соседних членов последовательности не меньше $10=1+9$. Значит, последовательность не может состоять из 28 или более чисел, поскольку $\frac{28}{2}\cdot 10=140>137$.

Сумма двух соседних членов последовательности равна 10 только тогда, когда эти числа равны 1 и 9, иначе их сумма не меньше $18=1+17$. Если последовательность состоит из 27 чисел, то либо эта последовательность состоит только из 1 и 9, либо в этой последовательности есть пара соседних членов, сумма которых 18 или больше. В первом случае сумма всех членов последовательности равна 131 или 139. Во втором случае помимо пары соседних членов последовательности, сумма которых 18 или больше, найдётся ещё 12 пар соседних членов последовательности, сумма которых 10 или больше, значит, сумма всех членов последовательности не меньше $138=18+12\cdot 10$. Таким образом, последовательность не может состоять из 27 чисел.

Любые два соседних члена последовательности одной чётности. Значит, последовательность не может состоять из чётного количества членов, поскольку в этом случае её сумма чётна. В частности, последовательность не может состоять из 26 чисел.

Последовательность может состоять из 25 чисел. Например, для 25 чисел 17, 1, 9, 1, 9, ... верно $17+12\cdot(1+9)=137$.

Ответ: а) 3; б) 25.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	4
Получены три из нижеперечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Получены два из нижеперечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Получен один из следующих результатов: – верно выполнен пункт *а*; – доказано, что в последовательности менее 28 членов; – доказано, что последовательность не может состоять из 26 и 27 чисел; – приведён пример последовательности, состоящей из 25 чисел	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Решения и критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

C1 а) Решите уравнение $81^{\cos x-0,25}-4\cdot 9^{\cos x-0,5}+1=0$.

б) Укажите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\dfrac{5\pi}{2};-\pi\right]$.

Решение.

а) Умножим обе части уравнения на 3: $81^{\cos x}-4\cdot 9^{\cos x}+3=0$.

Сделаем замену $y=9^{\cos x}$. Получаем квадратное уравнение $y^2-4y+3=0$. Корни: $y=1$ и $y=3$.

Из уравнения $9^{\cos x}=1$ находим: $\cos x=0$, откуда $x=\dfrac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$.

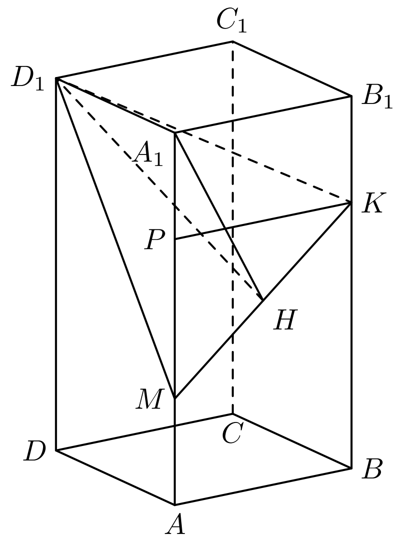
Из уравнения $9^{\cos x}=3$ находим: $\cos x=\dfrac{1}{2}$, откуда $x=\pm\dfrac{\pi}{3}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$.

б) С помощью числовой окружности находим, что отрезку $\left[-\dfrac{5\pi}{2};-\pi\right]$ принадлежат корни $-\dfrac{5\pi}{2}$, $-\dfrac{7\pi}{3}$, $-\dfrac{5\pi}{3}$ и $-\dfrac{3\pi}{2}$.

Ответ: а) $\dfrac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$; $\pm\dfrac{\pi}{3}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; б) $-\dfrac{5\pi}{2}$, $-\dfrac{7\pi}{3}$, $-\dfrac{5\pi}{3}$, $-\dfrac{3\pi}{2}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или в пункте *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

C2 В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ со стороной основания 12 и высотой 21 на ребре AA_1 взята точка M так, что $AM=8$. На ребре BB_1 взята точка K так, что $B_1K=8$. Найдите угол между плоскостью D_1MK и плоскостью CC_1D_1.



Решение.

Заменим плоскость CC_1D_1 параллельной ей плоскостью ABB_1. Из точки A_1 проведём перпендикуляр A_1H к прямой MK. Он является проекцией отрезка D_1H на плоскость ABB_1. Следовательно, $\angle A_1HD_1$ — линейный угол двугранного угла, образованного плоскостями D_1MK и ABB_1.

Опустим перпендикуляр KP на прямую AA_1. $PM = 5$, $KP = 12$, значит, $MK = 13$. В прямоугольном треугольнике A_1HM гипотенуза A_1M также равна 13. Значит, треугольники A_1HM и KPM равны по гипотенузе и общему острому углу M. Поэтому $A_1H = KP = 12$.

В прямоугольном треугольнике D_1A_1H катеты равны, следовательно, $\angle A_1HD_1$ равен $45°$.

Ответ: $45°$.

Содержание критерия	**Баллы**
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит обоснованный переход к планиметрической задаче, но получен неверный ответ или решение не закончено, или при правильном ответе решение недостаточно обосновано	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

C3 Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \log_{\frac{x}{3}}\left(\log_2 x + \log_8 x - 1\right) \geq \dfrac{1}{\log_2 \frac{x}{3}}, \\ 2^x + 2^{x+1} > 3^x. \end{cases}$$

Решение.

Решим первое неравенство системы:

$$\log_{\frac{x}{3}}\left(\frac{4}{3}\log_2 x - 1\right) \geq \log_{\frac{x}{3}} 2.$$

При $\frac{x}{3} > 1$ получаем:

$$\frac{4}{3}\log_2 x - 1 \geq 2;\ \log_2 x \geq \frac{9}{4},$$

откуда $x \geq 2^{\frac{9}{4}}$. Все решения последнего неравенства удовлетворяют условию $\frac{x}{3} > 1$.

При $0 < \frac{x}{3} < 1$ получаем:

$$0 < \frac{4}{3}\log_2 x - 1 \leq 2;\ \frac{3}{4} < \log_2 x \leq \frac{9}{4},$$

откуда $2^{\frac{3}{4}} < x \leq 2^{\frac{9}{4}}$. Учитывая условие $0 < \frac{x}{3} < 1$, получаем $2^{\frac{3}{4}} < x < 3$.

Решение первого неравенства системы $\left(2^{\frac{3}{4}};\, 3\right)$; $\left[2^{\frac{9}{4}};\, +\infty\right)$.

Решим второе неравенство системы:

$$3 \cdot 2^x > 3^x;\ 3 > \left(\frac{3}{2}\right)^x;\ x < \log_{\frac{3}{2}} 3.$$

Поскольку $\log_{\frac{3}{2}} 3 < 3 < 2^{\frac{9}{4}}$ и $\log_{\frac{3}{2}} 3 > 2 > 2^{\frac{3}{4}}$, получаем решение исходной системы неравенств: $\left(2^{\frac{3}{4}};\, \log_{\frac{3}{2}} 3\right)$

Ответ: $\left(2^{\frac{3}{4}};\, \log_{\frac{3}{2}} 3\right)$

Содержание критерия	**Баллы**
Обоснованно получен верный ответ	3
Обоснованно получены верные ответы в обоих неравенствах	2
Обоснованно получен верный ответ в одном неравенстве системы неравенств	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

C4 Расстояние между двумя параллельными прямыми равно 12. На одной из них взята точка C, а на другой взяты точки A и B так, что треугольник ABC — остроугольный равнобедренный, и его боковая сторона равна 15. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC.

Решение.

Опустим из точки C перпендикуляр CH на прямую AB. Длина перпендикуляра равна 12. Возможны два случая.

Первый случай (рис. 1): $AC = CB = 15$. Тогда из прямоугольного треугольника AHC находим: $AH = \sqrt{15^2 - 12^2} = 9$. Следовательно, $AB = 18$. Площадь треугольника ABC равна $\frac{1}{2} \cdot AB \cdot CH = \frac{1}{2} \cdot 18 \cdot 12 = 108$.

Радиус описанной окружности равен

$$\frac{AB \cdot BC \cdot AC}{4S_{ABC}} = \frac{18 \cdot 15 \cdot 15}{4 \cdot 108} = \frac{75}{8}.$$

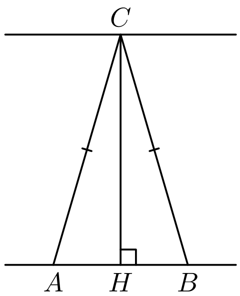


Рис. 1

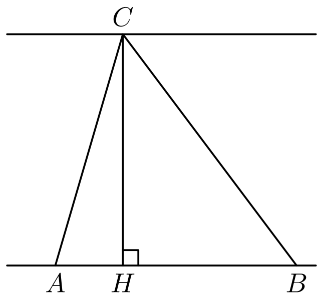


Рис. 2

Второй случай (рис. 2): одна из боковых сторон — сторона AB. Пусть, для определённости, $AB = AC = 15$. Тогда из прямоугольного треугольника AHC находим: $AH = \sqrt{15^2 - 12^2} = 9$. Поскольку треугольник ABC остроугольный, точка H лежит на стороне AB, поэтому $HB = 15 - 9 = 6$. Из прямоугольного треугольника BHC находим: $BC = \sqrt{6^2 + 12^2} = 6\sqrt{5}$. Площадь треугольника ABC равна $\frac{1}{2} \cdot AB \cdot CH = \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 12 = 90$.

Радиус описанной окружности равен

$$\frac{AB \cdot BC \cdot AC}{4S_{ABC}} = \frac{15 \cdot 6\sqrt{5} \cdot 15}{4 \cdot 90} = \frac{15\sqrt{5}}{4}.$$

Ответ: $\frac{75}{8}$ или $\frac{15\sqrt{5}}{4}$.

Содержание критерия	**Баллы**
Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации, и получен правильный ответ	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная конфигурация, для которой получено правильное значение искомой величины	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, в которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

C5 При каких значениях a уравнение $|x + a^2| = |a + x^2|$ имеет более трёх корней?

Решение.

Каждый корень уравнения $\left|x + a^2\right| = \left|a + x^2\right|$ является корнем уравнения $x + a^2 = a + x^2$ или корнем уравнения $-x - a^2 = a + x^2$.

Уравнение $x + a^2 = a + x^2$ имеет корни: $x = a$ и $x = 1 - a$. При

$a=\dfrac{1}{2}$ эти корни совпадают.

Уравнение $-x-a^2=a+x^2$ равносильно квадратному уравнению $x^2+x+a^2+a=0$. Дискриминант этого уравнения равен $1-4a^2-4a$, поэтому уравнение имеет два корня при $\dfrac{-\sqrt{2}-1}{2}<a<\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$, один корень при $a=\dfrac{-\sqrt{2}-1}{2}$ и $a=\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$, а иначе не имеет корней.

Уравнения $x+a^2=a+x^2$ и $-x-a^2=a+x^2$ имеют общий корень, только если для этого корня верно $x+a^2=a+x^2=0$. В этом случае $x=-a^2$ и $a^4+a=0$; $a\left(a+1\right)\left(a^2-a+1\right)=0$. При $a=0$ исходное уравнение имеет три корня: $x=-1$, $x=0$ и $x=1$. При $a=-1$ исходное уравнение имеет три корня: $x=-1$, $x=0$ и $x=2$.

Таким образом, исходное уравнение имеет более трёх корней при $\dfrac{-\sqrt{2}-1}{2}<a<-1$, $-1<a<0$ и $0<a<\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$.

Ответ: $\dfrac{-\sqrt{2}-1}{2}<a<-1$, $-1<a<0$, $0<a<\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$.

Содержание критерия	**Баллы**
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены все верные значения параметра, но – или в ответ включены также и одно-два неверных значения; – или решение недостаточно обосновано	3
С помощью верного рассуждения найдено хотя бы две граничные точки множества искомых значений параметра	2
С помощью верного рассуждения найдена хотя бы одна граничная точка множества искомых значений параметра	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

C6 Дана последовательность натуральных чисел, причём каждый следующий член отличается от предыдущего либо на 8, либо в 5 раз. Сумма всех членов последовательности равна 141.

а) Какое наименьшее число членов может быть в этой последовательности?

б) Какое наибольшее число членов может быть в этой последовательности?

Решение.

а) Последовательность не может состоять из двух чисел. Действительно, если два числа отличаются либо на 8, либо в 5 раз, то эти числа одной чётности и их сумма чётна, а 141 — нечётное число.

Последовательность может состоять из трёх чисел. Например, для чисел 27, 19 и 95 верно $27+19+95=141$.

б) Заметим, что сумма двух соседних членов последовательности не меньше $6=1+5$. Значит, последовательность не может состоять из 48 или более чисел, поскольку $\frac{48}{2}\cdot 6=144>141$.

Сумма двух соседних членов последовательности равна 6 только тогда, когда эти числа равны 1 и 5, иначе их сумма не меньше $10=1+9$. Если последовательность состоит из 47 чисел, то либо эта последовательность состоит только из 1 и 5, либо в этой последовательности есть пара соседних членов, сумма которых 10 или больше. В первом случае сумма всех членов последовательности равна 139 или 143. Во втором случае помимо пары соседних членов последовательности, сумма которых 10 или больше, найдётся ещё 22 пары соседних членов последовательности, сумма которых 6 или больше, значит, сумма всех членов последовательности не меньше $142=10+22\cdot 6$. Таким образом, последовательность не может состоять из 47 чисел.

Любые два соседних члена последовательности одной чётности. Значит, последовательность не может состоять из чётного количества членов, поскольку в этом случае её сумма чётна. В частности, последовательность не может состоять из 46 чисел.

Последовательность может состоять из 45 чисел. Например, для 45 чисел 9, 1, 5, 1, 5, . . . верно $9+22\cdot(1+5)=141$.

Ответ: а) 3; б) 45.

Содержание критерия	**Баллы**
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	4
Получены три из нижеперечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Получены два из нижеперечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Получен один из следующих результатов: – верно выполнен пункт *а*; – доказано, что в последовательности менее 48 членов; – доказано, что последовательность не может состоять из 46 и 47 чисел; – приведён пример последовательности, состоящей из 45 чисел	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Решения и критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

C1 а) Решите уравнение $\cos(2x) - \cos\left(x - \frac{5\pi}{2}\right) - 1 = 0$.

б) Укажите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{3\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Решение.

а) Преобразуем уравнение:

$$1 - 2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0;\ 2\sin^2 x + \sin x = 0;$$

$$\sin x \cdot (2\sin x + 1) = 0.$$

Из уравнения $\sin x = 0$ находим: $x = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Из уравнения $2\sin x + 1 = 0$ находим: $\sin x = -\frac{1}{2}$, откуда $x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi l$, $l \in \mathbb{Z}$; $x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$.

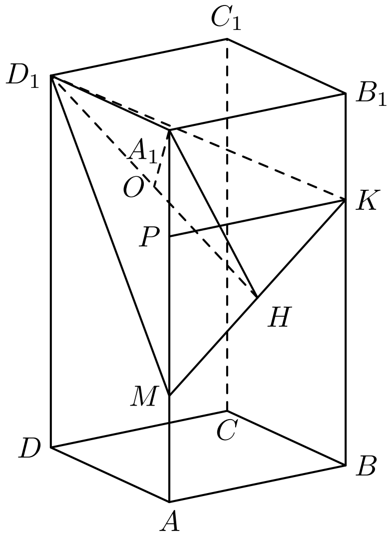
б) С помощью числовой окружности находим, что отрезку $\left[-\frac{3\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ принадлежат корни $-\pi$, $-\frac{5\pi}{6}$, $-\frac{\pi}{6}$ и 0.

Ответ: а) πk, $k \in \mathbb{Z}$; $-\frac{5\pi}{6} + 2\pi l$, $l \in \mathbb{Z}$; $-\frac{\pi}{6} + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$; б) $-\pi$, $-\frac{5\pi}{6}$, $-\frac{\pi}{6}$, 0.

Содержание критерия	**Баллы**
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или в пункте *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

C2 В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ со стороной основания 12 и высотой 21 на ребре AA_1 взята точка M так, что $AM = 8$. На ребре BB_1 взята точка K так, что $B_1K = 8$. Найдите расстояние от точки A_1 до плоскости D_1MK.

Решение.



Из точки A_1 проведём перпендикуляр A_1H к прямой MK и перпендикуляр A_1O к плоскости D_1MK. Точка O лежит на гипотенузе D_1H прямоугольного треугольника D_1A_1H, поэтому отрезок A_1O — высота этого треугольника.

Опустим перпендикуляр KP на прямую AA_1. $PM = 5$, $KP = 12$, значит, $MK = 13$. В прямоугольном треугольнике A_1HM гипотенуза A_1M также равна 13. Значит, треугольники A_1HM и KPM равны по гипотенузе и общему острому углу M. Поэтому $A_1H = KP = 12$.

В прямоугольном треугольнике D_1A_1H катеты равны, следовательно, $A_1O = A_1H \cdot \sin 45^\circ = 6\sqrt{2}$.

Ответ: $6\sqrt{2}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит обоснованный переход к планиметрической задаче, но получен неверный ответ или решение не закончено, или при правильном ответе решение недостаточно обосновано	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

C3 Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \log_x\left(\log_3 x + \log_{27} x + 2\right) \geq \dfrac{1}{\log_3 x}, \\ 6^x + 6^{x+1} > 7^x. \end{cases}$$

Решение.

Решим первое неравенство системы:

$$\log_x\left(\frac{4}{3}\log_3 x + 2\right) \geq \log_x 3.$$

При $x > 1$ получаем:

$$\frac{4}{3}\log_3 x + 2 \geq 3;\ \log_3 x \geq \frac{3}{4},$$

откуда $x \geq 3^{\frac{3}{4}}$. Все решения последнего неравенства удовлетворяют условию $x > 1$.

При $0 < x < 1$ получаем:

$$0 < \frac{4}{3}\log_3 x + 2 \leq 3;\ -\frac{3}{2} < \log_3 x \leq \frac{3}{4},$$

откуда $3^{-\frac{3}{2}} < x \leq 3^{\frac{3}{4}}$. Учитывая условие $0 < x < 1$, получаем $3^{-\frac{3}{2}} < x < 1$.

Решение первого неравенства системы $\left(3^{-\frac{3}{2}}; 1\right)$; $\left[3^{\frac{3}{4}}; +\infty\right)$.

Решим второе неравенство системы:

$$7 \cdot 6^x > 7^x;\ 7 > \left(\frac{7}{6}\right)^x;\ x < \log_{\frac{7}{6}} 7.$$

Поскольку $\log_{\frac{7}{6}} 7 > 3 > 3^{\frac{3}{4}}$, получаем решение исходной системы неравенств: $\left(3^{-\frac{3}{2}}; 1\right)$; $\left[3^{\frac{3}{4}}; \log_{\frac{7}{6}} 7\right)$.

Ответ: $\left(3^{-\frac{3}{2}}; 1\right)$; $\left[3^{\frac{3}{4}}; \log_{\frac{7}{6}} 7\right)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Обоснованно получены верные ответы в обоих неравенствах	2
Обоснованно получен верный ответ в одном неравенстве системы неравенств	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

C4 Расстояние между двумя параллельными прямыми равно 21. На одной из них взята точка C, а на другой взяты точки A и B так, что треугольник ABC — остроугольный равнобедренный, и его боковая сторона равна 29. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC.

Решение.

Опустим из точки C перпендикуляр CH на прямую AB. Длина перпендикуляра равна 21. Возможны два случая.

Первый случай (рис. 1): $AC = CB = 29$. Тогда из прямоугольного треугольника AHC находим: $AH = \sqrt{29^2 - 21^2} = 20$. Следовательно, $AB = 40$. Площадь треугольника ABC равна $\frac{1}{2} \cdot AB \cdot CH = \frac{1}{2} \cdot 40 \cdot 21 = 420$.

Радиус описанной окружности равен

$$\frac{AB \cdot BC \cdot AC}{4S_{ABC}} = \frac{29 \cdot 29 \cdot 40}{4 \cdot 420} = \frac{841}{42}.$$

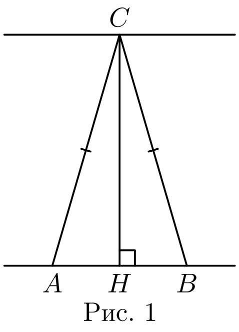


Рис. 1

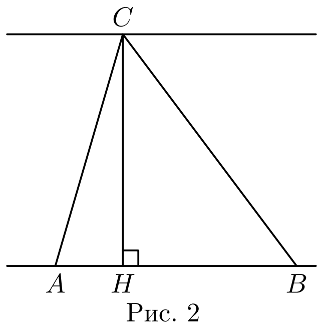


Рис. 2

Второй случай (рис. 2): одна из боковых сторон — сторона AB. Пусть, для определённости, $AB = AC = 29$. Тогда из прямоугольного треугольника AHC находим: $AH = \sqrt{29^2 - 21^2} = 20$. Поскольку треугольник ABC остроугольный, точка H лежит на стороне AB, поэтому $HB = 29 - 20 = 9$. Из прямоугольного треугольника BHC находим: $BC = \sqrt{21^2 + 9^2} = 3\sqrt{58}$. Площадь треугольника ABC равна $\frac{1}{2} \cdot AB \cdot CH = \frac{1}{2} \cdot 29 \cdot 21 = \frac{609}{2}$.

Радиус описанной окружности равен

$$\frac{AB \cdot BC \cdot AC}{4S_{ABC}} = \frac{29 \cdot 29 \cdot 3\sqrt{58}}{2 \cdot 609} = \frac{29\sqrt{58}}{14}.$$

Ответ: $\frac{841}{42}$ или $\frac{29\sqrt{58}}{14}$.

Содержание критерия	**Баллы**
Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации, и получен правильный ответ	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная конфигурация, для которой получено правильное значение искомой величины	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, в которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

C5 При каких значениях a уравнение $|x + a^2| = |x^2 - a|$ имеет более трёх корней?

Решение.

Каждый корень уравнения $\left|x + a^2\right| = \left|x^2 - a\right|$ является корнем уравнения $x + a^2 = x^2 - a$ или корнем уравнения $-x - a^2 = x^2 - a$.

Уравнение $x+a^2=x^2-a$ имеет корни: $x=-a$ и $x=1+a$. При $a=-\dfrac{1}{2}$ эти корни совпадают.

Уравнение $-x-a^2=x^2-a$ равносильно квадратному уравнению $x^2+x+a^2-a=0$. Дискриминант этого уравнения равен $1-4a^2+4a$, поэтому уравнение имеет два корня при $\dfrac{1-\sqrt{2}}{2}<a<\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}$, один корень при $a=\dfrac{1-\sqrt{2}}{2}$ и $a=\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}$, а иначе не имеет корней.

Уравнения $x+a^2=x^2-a$ и $-x-a^2=x^2-a$ имеют общий корень, только если для этого корня верно $x+a^2=x^2-a=0$. В этом случае $x=-a^2$ и $a^4-a=0$; $a\left(a-1\right)\left(a^2+a+1\right)=0$. При $a=0$ исходное уравнение имеет три корня: $x=-1$, $x=0$ и $x=1$. При $a=1$ исходное уравнение имеет три корня: $x=-1$, $x=0$ и $x=2$.

Таким образом, исходное уравнение имеет более трёх корней при $\dfrac{1-\sqrt{2}}{2}<a<0$, $0<a<1$ и $1<a<\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}$.

Ответ: $\dfrac{1-\sqrt{2}}{2}<a<0$, $0<a<1$, $1<a<\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}$.

Содержание критерия	**Баллы**
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены все верные значения параметра, но – или в ответ включены также и одно-два неверных значения; – или решение недостаточно обосновано	3
С помощью верного рассуждения найдено хотя бы две граничные точки множества искомых значений параметра	2
С помощью верного рассуждения найдена хотя бы одна граничная точка множества искомых значений параметра	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

C6 Дана последовательность натуральных чисел, причём каждый следующий член отличается от предыдущего либо на 12, либо в 7 раз. Сумма всех членов последовательности равна 93.

а) Какое наименьшее число членов может быть в этой последовательности?

б) Какое наибольшее число членов может быть в этой последовательности?

Решение.

а) Последовательность не может состоять из двух чисел. Действительно, если два числа отличаются либо на 12, либо в 7 раз, то эти числа одной чётности и их сумма чётна, а 93 — нечётное число.

Последовательность может состоять из трёх чисел. Например, для чисел 21, 9 и 63 верно $21+9+63=93$.

б) Заметим, что сумма двух соседних членов последовательности не меньше $8=1+7$. Значит, последовательность не может состоять из 24 или более чисел, поскольку $\frac{24}{2}\cdot 8=96>93$.

Сумма двух соседних членов последовательности равна 8 только тогда, когда эти числа равны 1 и 7, иначе их сумма не меньше $14=1+13$. Если последовательность состоит из 23 чисел, то либо эта последовательность состоит только из 1 и 7, либо в этой последовательности есть пара соседних членов, сумма которых 14 или больше. В первом случае сумма всех членов последовательности равна 89 или 95. Во втором случае помимо пары соседних членов последовательности, сумма которых 14 или больше, найдётся ещё 10 пар соседних членов последовательности, сумма которых 8 или больше, значит, сумма всех членов последовательности не меньше $94=14+10\cdot 8$. Таким образом, последовательность не может состоять из 23 чисел.

Любые два соседних члена последовательности одной чётности. Значит, последовательность не может состоять из чётного количества членов, поскольку в этом случае её сумма чётна. В частности, последовательность не может состоять из 22 чисел.

Последовательность может состоять из 21 числа. Например, для 21 числа 13, 1, 7, 1, 7, ... верно $13+10\cdot(1+7)=93$.

Ответ: а) 3; б) 21.

Содержание критерия	**Баллы**
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	4
Получены три из нижеперечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Получены два из нижеперечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Получен один из следующих результатов: – верно выполнен пункт a; – доказано, что в последовательности менее 24 членов; – доказано, что последовательность не может состоять из 22 и 23 чисел; –приведён пример последовательности, состоящей из 21 числа	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4