Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

C1 а) Решите уравнение $\log_5(\cos x - \sin 2x + 25) = 2$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$.

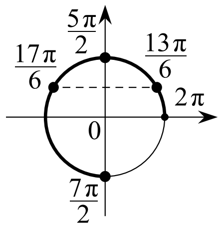
Решение.

а) Из данного уравнения получаем:

$$\cos x - \sin 2x + 25 = 25;\ 2\sin x\cos x - \cos x = 0;\ \cos x\cdot(2\sin x - 1) = 0.$$

Значит, или $\cos x = 0$, откуда $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, или $\sin x = \frac{1}{2}$, откуда $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$ или $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$.



Получим числа: $\frac{13\pi}{6}$; $\frac{5\pi}{2}$; $\frac{17\pi}{6}$; $\frac{7\pi}{2}$.

Замечание. Отбор корней может быть обоснован и любым другим способом: с помощью графика, решения двойных неравенств и т.п.

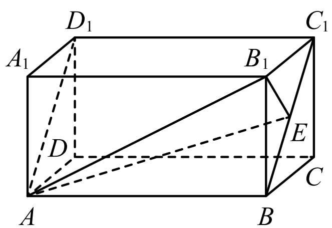
Ответ: а) $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; $\frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $\frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{13\pi}{6}$; $\frac{5\pi}{2}$; $\frac{17\pi}{6}$; $\frac{7\pi}{2}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или в пункте *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

C2 В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $AB = 2$, $AD = AA_1 = 1$. Найдите угол между прямой AB_1 и плоскостью ABC_1.

Решение.

Плоскости ABC_1 и BCC_1 перпендикулярны. Перпендикуляр из точки B_1 к плоскости ABC_1 лежит в плоскости BCC_1 и пересекает прямую BC_1 в точке E. Значит, искомый угол равен углу B_1AE. В прямоугольном треугольнике B_1AE $B_1E = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $AB_1 = \sqrt{5}$.



Следовательно, $\sin\angle B_1AE = \frac{\sqrt{10}}{10}$.

$$\left(\cos\angle B_1AE = \frac{3\sqrt{10}}{10};\ \operatorname{tg}\angle B_1AE = \frac{1}{3}.\right)$$

Ответ: $\arcsin\frac{\sqrt{10}}{10}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит обоснованный переход к планиметрической задаче, но получен неверный ответ или решение не закончено, или при правильном ответе решение недостаточно обосновано	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

C3 Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 4\cdot 4^x - 33\cdot 2^x + 8 \le 0, \\ \log_{x^2}(x-1)^2 \le 1. \end{cases}$$

Решение.

1. Решим первое неравенство системы. Сделаем замену $y = 2^x$.

$$4y^2 - 33y + 8 \le 0;\ (4y-1)(y-8) \le 0;\ \frac{1}{4} \le y \le 8.$$

Тогда $\frac{1}{4} \le 2^x \le 8$, откуда находим решение первого неравенства системы: $-2 \le x \le 3$.

2. Решим второе неравенство системы. Рассмотрим два случая.

Первый случай: $x^2 > 1$.

$$\log_{x^2}(x-1)^2 \le 1;\ (x-1)^2 \le x^2;\ 2x - 1 \ge 0;\ x \ge \frac{1}{2}.$$

Учитывая условие $x^2 > 1$, получаем: $x > 1$.

Второй случай: $0 < x^2 < 1$.

$$\log_{x^2}(x-1)^2 \le 1;\ (x-1)^2 \ge x^2;\ 2x - 1 \le 0;\ x \le \frac{1}{2}.$$

Учитывая условие $0 < x^2 < 1$, получаем: $-1 < x < 0$; $0 < x \le \frac{1}{2}$.

Решение второго неравенства системы:

$$-1 < x < 0;\ 0 < x \le \frac{1}{2};\ x > 1.$$

3. Решение исходной системы неравенств:

$$-1 < x < 0;\ 0 < x \le \frac{1}{2};\ 1 < x \le 3.$$

Ответ: $(-1; 0)$; $\left(0; \frac{1}{2}\right]$; $(1; 3]$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Обоснованно получены верные ответы в обоих неравенствах системы неравенств	2
Обоснованно получен верный ответ в одном неравенстве системы неравенств	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

C4 Боковые стороны KL и MN трапеции $KLMN$ равны 10 и 26 соответственно. Отрезок, соединяющий середины диагоналей, равен 12, средняя линия трапеции равна 24. Прямые KL и MN пересекаются в точке A. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ALM.

Решение.

В любой трапеции отрезок, соединяющий середины диагоналей трапеции, равен полуразности оснований трапеции, а средняя линия — полусумме оснований трапеции. В нашем случае полуразность оснований равна 12, а полусумма оснований равна 24, поэтому основания трапеции равны 12 и 36.

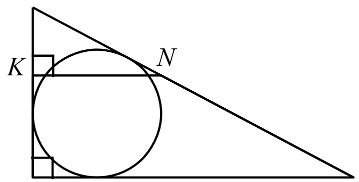


Рис. 1

Предположим, что $LM=36$, $KN=12$ (рис. 1). Стороны LM и KN треугольников ALM и AKN параллельны, поэтому эти треугольники подобны с коэффициентом $k=\frac{1}{3}$. Значит,

$$AL=\frac{KL}{1-k}=15,\ AM=\frac{MN}{1-k}=39.$$

Заметим, что $AL^2+LM^2=AM^2$, поэтому треугольник ALM — прямоугольный с гипотенузой AM. Радиус его вписанной окружности равен:

$$r=\frac{AL+LM-AM}{2}=6.$$

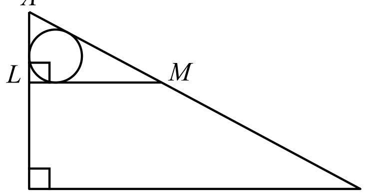


Рис. 2

Пусть теперь $KN=36$, $LM=12$ (рис. 2). Аналогично предыдущему случаю можно показать, что радиус вписанной окружности треугольника AKN равен 6. Треугольники AKN и ALM подобны с коэффициентом $k=\frac{1}{3}$. Значит, радиус вписанной окружности треугольника ALM равен $r=6k=2$.

Ответ: 2; 6.

Содержание критерия	Баллы
Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации и получен правильный ответ	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная конфигурация, в которой получено правильное значение искомой величины	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, в которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

C5 Найдите все значения a, при каждом из которых наименьшее значение функции

$$f(x)=4x^2+4ax+a^2-2a+2$$

на множестве $1\le|x|\le3$ не меньше 6.

Решение.

Графиком функции $f(x)=(2x+a)^2-2a+2$ является парабола, ветви которой направлены вверх, а вершина имеет координаты $\left(-\frac{a}{2};-2a+2\right)$. Значит, минимум функции $f(x)$ на всей числовой оси достигается при $x=-\frac{a}{2}$.

На множестве $1\le|x|\le3$ эта функция достигает наименьшего значения либо в точке $x=-\frac{a}{2}$, если эта точка принадлежит множеству, либо в одной из граничных точек $x=\pm1$, $x=\pm3$.

Если наименьшее значение функции не меньше 6, то и всякое значение функции не меньше 6. В частности,

$$f(1)\ge6;\ a^2+2a+6\ge6;\ a(a+2)\ge0,$$

$$f(-1)\ge6;\ a^2-6a+6\ge6;\ a(a-6)\ge0,$$

откуда получаем систему неравенств

$$\begin{cases}a(a+2)\ge0,\\a(a-6)\ge0,\end{cases}$$

решениями которой являются $a\le-2$; $a=0$; $a\ge6$.

При $a\le-2$ имеем: $-\frac{a}{2}\ge1$ и $f\left(-\frac{a}{2}\right)=-2a+2\ge6$. Значит, наименьшее значение функции на всей числовой оси не менее 6, и условие задачи выполнено.

При $a=0$ имеем: $-\frac{a}{2}=0$, значит, наименьшее значение функции достигается в одной из граничных точек $x=\pm 1$, в которых значение функции не меньше 6.

При $a\geq 6$ имеем: $-\frac{a}{2}\leq -3$, значит, поскольку на промежутке $\left(-\frac{a}{2};+\infty\right)$ функция возрастает, наименьшее значение функции достигается в точке $x=-3$ и $f(-3)=a^2-14a+38$.

$$a^2-14a+38\geq 6;\ a^2-14a+32\geq 0,$$

откуда, учитывая условие $a\geq 6$, находим: $a\geq 7+\sqrt{17}$.

Ответ: $a\leq -2$; $a=0$; $a\geq 7+\sqrt{17}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений *a*, отличающееся от искомого конечным числом точек	3
С помощью верного рассуждения получены все граничные точки искомого множества значений *a*	2
Верно получена хотя бы одна граничная точка искомого множества значений *a*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

C6 Каждое из чисел 1, -2, -3, 4, -5, 7, -8, 9, 10, -11 по одному записывают на 10 карточках. Карточки переворачивают и перемешивают. На их чистых сторонах заново пишут по одному каждое из чисел 1, -2, -3, 4, -5, 7, -8, 9, 10, -11. После этого числа на каждой карточке складывают, а полученные десять сумм перемножают.

а) Может ли в результате получиться 0?

б) Может ли в результате получиться 1?

в) Какое наименьшее целое неотрицательное число может в результате получиться?

Решение.

а) Среди десяти данных чисел нет противоположных. Значит, сумма чисел на каждой карточке не равна 0. Поэтому всё произведение не может равняться нулю.

б) Среди десяти данных чисел шесть нечётных. Значит, на какой-то карточке попадётся два нечётных числа, и их сумма чётная. Поэтому всё произведение чётно и не может равняться 1.

в) Среди десяти данных чисел шесть нечётных. Значит, хотя бы на двух карточках с обеих сторон написаны нечётные числа, и сумма чисел на каждой из этих карточек чётная. Поэтому всё произведение делится на 4.

Наименьшее целое положительное число, делящееся на 4, это 4. Оно получается при следующем наборе пар чисел на карточках: $(1;-2)$; $(-2;1)$; $(-3;4)$; $(4;-3)$; $(-5;7)$; $(7;-5)$; $(-8;9)$; $(9;-8)$; $(10;-11)$; $(-11;10)$.

Ответ: а) нет; б) нет; в) 4.

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: — обоснованное решение п. *а*; — обоснованное решение п. *б*; — искомая оценка в п. *в*; — пример в п. *в*, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4