Вариант № 3

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

С1 а) Решите уравнение $\sin 2x + \sin x = 2\cos x + 1$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$.

Решение. а) Воспользовавшись формулой $\sin 2x = 2\sin x \cos x$, получаем

$$2\sin x\cos x + \sin x = 2\cos x + 1;\ (\sin x - 1)(2\cos x + 1) = 0,$$

откуда $\sin x = 1$, $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, или $\cos x = -\frac{1}{2}$, $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

б) Найдем корни, принадлежащие отрезку $\left[-\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$:

$-\pi \le \frac{\pi}{2} + 2\pi k \le \frac{3\pi}{2}, -1 \le \frac{1}{2} + 2k \le \frac{3}{2}$, откуда $k = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$.

$-\pi \le \frac{2\pi}{3} + 2\pi k \le \frac{3\pi}{2}, -1 \le \frac{2}{3} + 2k \le \frac{3}{2}$, откуда $k = 0$, $x = \frac{2\pi}{3}$.

$-\pi \le -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k \le \frac{3\pi}{2}, -1 \le -\frac{2}{3} + 2k \le \frac{3}{2}$, откуда $k = 0$, $x = -\frac{2\pi}{3}$ или $k = 1$, $x = \frac{4\pi}{3}$.

Таким образом, отрезку $\left[-\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$ принадлежат числа: $-\frac{2\pi}{3}; \frac{\pi}{2}; \frac{2\pi}{3}; \frac{4\pi}{3}$.

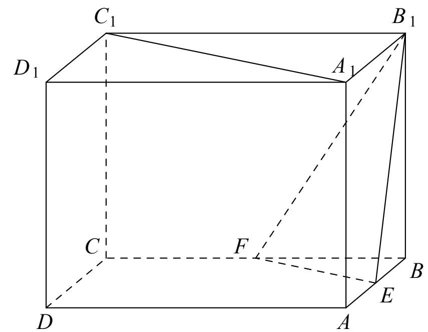
Ответ: а) $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$; $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

б) $-\frac{2\pi}{3}; \frac{\pi}{2}; \frac{2\pi}{3}; \frac{4\pi}{3}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в п. *а)* и в п. *б)*	2
Обоснованно получен верный ответ в п. *а)*, но обоснование отбора корней в п. *б)* не приведено или задача в п. *а)* обоснованно сведена к исследованию простейших тригонометрических уравнений без предъявления верного ответа, а в п. *б)* приведен обоснованный отбор корней	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

С2 В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $AB = 2$, $AD = 4$, $AA_1 = 3$ и точка E — середина ребра AB. Найдите угол между прямыми A_1C_1 и B_1E.

Решение. Если F — середина ребра BC, то EF — средняя линия треугольника ABC, откуда $EF \parallel AC \parallel A_1C_1$, тогда угол между прямыми A_1C_1 и B_1E равен углу B_1EF.



$$EF^2 = 1^2 + 2^2 = 5;\ B_1E^2 = 1^2 + 3^2 = 10;\ B_1F^2 = 3^2 + 2^2 = 13.$$

Найдем косинус угла B_1EF из треугольника B_1EF по теореме косинусов:

$$B_1F^2 = B_1E^2 + EF^2 - 2 \cdot B_1E \cdot EF \cdot \cos\angle B_1EF,$$

откуда

$$\cos\angle B_1EF = \frac{5 + 10 - 13}{2\sqrt{5}\cdot\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{50}}.$$

$$\left(\sin\angle B_1EF = \frac{7}{\sqrt{50}};\ \mathrm{tg}\angle B_1EF = 7.\right)$$

Ответ: $\arccos\frac{\sqrt{50}}{50}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит обоснованный переход к планиметрической задаче, но получен неверный ответ или решение не закончено, или при правильном ответе решение недостаточно обосновано	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

C3 Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 2^{2x+1} - 2^{x+2} - 2^x \le 3, \\ \log_{x+\frac{2}{9}} 3 \le \log_{\sqrt{x}} 3. \end{cases}$$

Решение. 1) Решим первое неравенство системы.

$$2^{2x+1} - 2^{x+2} - 2^x \le 3,\ 2\cdot\left(2^x\right)^2 - 5\cdot 2^x \le 3.$$

Обозначив $t=2^x$, получаем неравенство $2t^2 - 5t - 3 \le 0$, откуда $-\frac{1}{2} \le t \le 3$, $-\frac{1}{2} \le 2^x \le 3$, $x \le \log_2 3$.

2) Решим второе неравенство системы. Его область допустимых значений: $x > 0,\ \ x \ne 1,\ \ x \ne \frac{7}{9}$. Перейдем к логарифмам по основанию 3:

$$\frac{1}{\log_3\left(x+\frac{2}{9}\right)} \le \frac{1}{\log_3 \sqrt{x}};\ \frac{\log_3\left(x+\frac{2}{9}\right) - \log_3\sqrt{x}}{\log_3\left(x+\frac{2}{9}\right)\cdot\log_3\sqrt{x}} \ge 0.$$

Выясним, когда числитель последней дроби будет положительным, отрицательным и равным нулю.

Числитель равен нулю, если $\log_3\left(x+\frac{2}{9}\right) = \log_3\sqrt{x}$, $x+\frac{2}{9}=\sqrt{x}$. Полагая $t=\sqrt{x}$, получаем уравнение $t^2+\frac{2}{9}=t$, $t_1=\frac{1}{3}$, $t_2=\frac{2}{3}$, откуда $x_1=\frac{1}{9}$, $x_2=\frac{4}{9}$.

Числитель положителен, если $\log_3\left(x+\frac{2}{9}\right) > \log_3\sqrt{x}$, $x+\frac{2}{9}>\sqrt{x}$. Полагая $t=\sqrt{x}$, получаем неравенство $t^2+\frac{2}{9}>t$, $t\in\left(-\infty;\frac{1}{3}\right)\cup\left(\frac{2}{3};+\infty\right)$, откуда с учетом области допустимых значений x получаем:

$$x\in\left(0;\frac{1}{9}\right)\cup\left(\frac{4}{9};\frac{7}{9}\right)\cup\left(\frac{7}{9};1\right)\cup\left(1;+\infty\right).$$

Наконец, числитель дроби будет отрицательным при $x\in\left(\frac{1}{9};\frac{4}{9}\right)$.

Знаменатель дроби будет положительным при $x\in\left(0;\frac{7}{9}\right)\cup\left(1;+\infty\right)$ и отрицательным — при $x\in\left(\frac{7}{9};1\right)$.

Вся дробь будет неотрицательной в трех случаях: когда числитель равен нулю, а знаменатель не равен нулю; когда числитель и знаменатель положительны и когда числитель и знаменатель отрицательны. Исходя из рассмотренного, получаем: $x\in\left(0;\frac{1}{9}\right]\cup\left[\frac{4}{9};\frac{7}{9}\right)\cup\left(1;+\infty\right)$.

3) Решением системы неравенств является пересечение множеств $\left(-\infty;\log_2 3\right]$ и $\left(0;\frac{1}{9}\right]\cup\left[\frac{4}{9};\frac{7}{9}\right)\cup\left(1;+\infty\right)$: $\left(0;\frac{1}{9}\right]\cup\left[\frac{4}{9};\frac{7}{9}\right)\cup\left(1;\log_2 3\right]$.

Ответ. $\left(0;\frac{1}{9}\right],\left[\frac{4}{9};\frac{7}{9}\right),\left(1;\log_2 3\right]$.

Содержание критерия	Баллы
Обосновано получен верный ответ	3
Оба неравенства системы решены верно, но система решена неверно	2
Верно решено только одно из двух неравенств системы	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

C4 Радиусы окружностей S_1 и S_2 с центрами O_1 и O_2 равны 1 и 7 соответственно, расстояние между точками O_1 и O_2 равно 5. Хорда AB окружности S_2 касается окружности S_1 в точке M, причем точки O_1 и O_2 лежат по одну сторону от прямой AB. Найдите длину отрезка AB, если известно, что $AM : MB = 1:6$.

Решение. Опустим из точек O_1 и O_2 перпендикуляры O_1M и O_2K на прямую AB. Далее опустим перпендикуляр O_1L на прямую O_2K. Возможны два случая расположения точек K, L и O_2: точка L лежит на отрезке KO_2, точка L лежит на луче KO_2 за точкой O_2 (случай, когда точка L лежит на луче O_2K за точкой K, невозможен по условию).

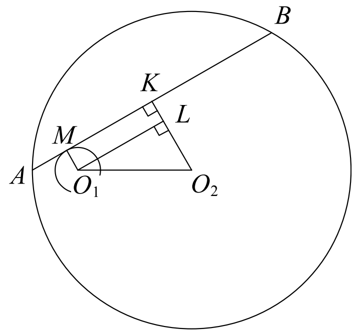


Рис. 1

1) Пусть точка L лежит на отрезке KO_2 (рис. 1). Положим $AM = x$, тогда $MB = 6x$, $AB = 7x$. Точка K является серединой отрезка AB (диаметр, перпендикулярный хорде, делит её пополам), поэтому $BK = \frac{7}{2}x$, $O_1L = MK = AK - AM = \frac{5}{2}x$, $LK = O_1M = 1$.

По теореме Пифагора для треугольника O_2KB находим

$$O_2K = \sqrt{BO_2^2 - BK^2} = \sqrt{7^2 - \left(\frac{7}{2}x\right)^2} = \frac{7}{2}\sqrt{4 - x^2}.$$

По теореме Пифагора для треугольника O_2O_1L находим

$$O_2L = \sqrt{O_1O_2^2 - O_1L^2} = \sqrt{5^2 - \left(\frac{5}{2}x\right)^2} = \frac{5}{2}\sqrt{4 - x^2}.$$

Из условия $O_2L + LK = O_2K$ получаем уравнение: $\frac{5}{2}\sqrt{4 - x^2} + 1 = \frac{7}{2}\sqrt{4 - x^2}$.

Решая это уравнение, находим $x = \sqrt{3}$, тогда $AB = 7x = 7\sqrt{3}$.

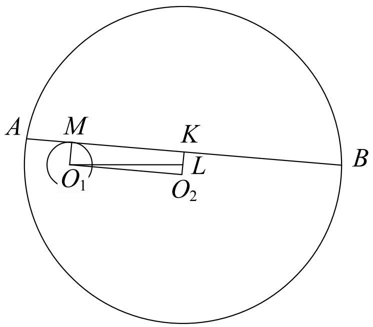


Рис. 2

2) Пусть точка L лежит на луче KO_2 за точкой O_2, в частности, может быть O_2 и K совпадают, то есть хорда AB является диаметром окружности S_2 (рис. 2). Снова положим $AM = x$, тогда $O_2L = \frac{5}{2}\sqrt{4 - x^2}$, $LK = 1$, $O_2K = \frac{7}{2}\sqrt{4 - x^2}$. $O_2L + O_2K = LK$, откуда получаем уравнение: $\frac{5}{2}\sqrt{4 - x^2} + \frac{7}{2}\sqrt{4 - x^2} = 1$. Решая это уравнение, находим $x = \frac{\sqrt{143}}{6}$, откуда $AB = 7x = \frac{7\sqrt{143}}{6}$.

Ответ: $7\sqrt{3}$; $\frac{7\sqrt{143}}{6}$.

Содержание критерия	Баллы
Обосновано получен верный ответ	3
Рассмотрена хотя бы одна геометрическая конфигурация, для которой получено правильное значение искомой величины	2
Рассмотрена хотя бы одна геометрическая конфигурация, для которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

C5 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$ax - 1 = \sqrt{8x - x^2 - 15}$$

имеет единственное решение.

Решение. Рассмотрим две функции $y = ax$ и $y = \sqrt{8x - x^2 - 15} + 1$.

Графиком первой функции является прямая, проходящая через начало координат.

График второй функции можно построить, записав $y - 1 = \sqrt{8x - x^2 - 15}$, то есть $(y-1)^2 = 8x - x^2 - 15$ при $y \geq 1$, или $(y-1)^2 + (x-4)^2 = 1$ при $y \geq 1$. Получаем, что искомый график — верхняя полуокружность с центром $(4;\ 1)$ и радиусом 1. Обозначим точки $A\ (3;\ 1)$ и $B\ (5;\ 1)$.

Исходная система имеет единственное решение тогда и только тогда, когда графики двух рассматриваемых функций имеют единственную общую точку. Это возможно только в двух случаях: когда прямая $y = ax$ касается полуокружности, или когда прямая $y = ax$ проходит между прямыми OA и OB (при этом если прямая $y = ax$ совпадает с OA, то будет две точки пересечения, а если прямая $y = ax$ совпадает с OB, то будет одна точка пересечения).

Прямая $y = ax$ проходит через точку A тогда и только тогда, когда координаты этой точки удовлетворяют уравнению прямой, то есть если $1 = a \cdot 3$, $a = \frac{1}{3}$.

Аналогично, прямая $y = ax$ проходит через точку B при $a = \frac{1}{5}$.

Чтобы найти значение a, при котором прямая $y = ax$ касается полуокружности, потребуем, чтобы система из двух уравнений $y = ax$ и $(y-1)^2 + (x-4)^2 = 1$ имела единственное решение. Это равносильно тому, что дискриминант квадратного уравнения $(ax-1)^2 + (x-4)^2 = 1$ равен нулю, откуда получаем, что $a = \frac{8}{15}$ или $a = 0$. Второе значение a является посторонним, так как соответствует случаю, при котором горизонтальная прямая $y = ax$ касается нижней полуокружности $(y-1)^2 + (x-4)^2 = 1$. Итак, прямая $y = ax$ имеет ровно одну общую точку с полуокружностью $(y-1)^2 + (x-4)^2 = 1$, $y \ge 1$, при $\frac{1}{5} \le a < \frac{1}{3}$ или при $a = \frac{8}{15}$.

Ответ: $\left[\frac{1}{5}; \frac{1}{3}\right); \frac{8}{15}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены искомые значения, отличающиеся от верных либо только конечным числом значений	3
Верно указаны и конец промежутка решений, и значение $a = \frac{8}{15}$, но ответ неверен или его нет	2
Верно указан только конец промежутка решений или указано только значение $a = \frac{8}{15}$	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

C6 Имеется арифметическая прогрессия, состоящая из пятидесяти чисел.
а) Может ли эта прогрессия содержать ровно 6 целых чисел?
б) Может ли эта прогрессия содержать ровно 29 целых чисел?
в) Найдите наименьшее число n, при котором эта прогрессия **не** может содержать ровно n целых чисел.

Решение. а) Прогрессия может содержать ровно 6 целых чисел. Один из многих возможных примеров таков. Рассмотрим арифметическую прогрессию $a_1 = 1$, $d = \frac{1}{9}$. Тогда целые значения в этой прогрессии будут принимать только члены с номерами 1, 10, 19, 28, 37 и 46, то есть эта прогрессия будет содержать ровно 6 целых чисел.

б) Прогрессия не может содержать ровно 29 целых чисел. Если арифметическая прогрессия из 50 чисел содержит 26 и более целых чисел (в частности, 29 чисел), то какие-то два целых числа являются соседними членами этой прогрессии. Но тогда вся прогрессия состоит из целых чисел.

в) Докажем, что, во-первых, в прогрессии не может быть ровно 11 целых чисел (пример), и, во-вторых, может быть от 1 до 10 целых чисел.

Пусть a_k и a_l — первый и второй члены прогрессии, которые являются целыми числами. Тогда если $t = l - k$, то целыми будут только члены прогрессии с номерами k, $k+t$, $k+2t$, $k+3t$, $k+4t$ и т.д. То есть среди любых t подряд идущих членов прогрессии целым является ровно один член. Разобьем 50 членов прогрессии на группы по t подряд идущих членов, при этом в конце останется еще менее t членов. В каждой группе из t членов имеется ровно одно целое число, а в последней группе из менее t членов целое число может быть, а может и не быть. То есть всего в прогрессии будет $\left[\frac{50}{t}\right]$ или $\left[\frac{50}{t}\right]+1$ целых членов, где $\left[\frac{50}{t}\right]$ — целая часть числа. При этом $\left[\frac{50}{t}\right]+1$ целых членов прогрессии может быть только тогда, когда число $\frac{50}{t}$ нецелое, то есть когда в конце имеется неполная группа. Оба случая действительно возможны: в прогрессии $a_1 = 1$, $d = \frac{1}{t}$ (формула 1) будет ровно $\left[\frac{50}{t}\right]+1$ целых членов (по одному в каждой группе из t членов и первый член в последней неполной группе), а в прогрессии $a_1 = \frac{1}{t}$, $d = \frac{1}{t}$ (формула 2) будет ровно $\left[\frac{50}{t}\right]$ целых членов (по одному в каждой группе из t членов, в последней неполной группе целого числа не будет). Легко проверить, что числа $\left[\frac{50}{t}\right]$ или $\left[\frac{50}{t}\right]+1$ (последнее — при нецелом $\frac{50}{t}$) могут принимать значения 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 и 10. При этом при $t=5$ $\left[\frac{50}{t}\right]=10$ и число $\left[\frac{50}{t}\right]$ — целое, а при $t=4$ $\left[\frac{50}{t}\right]=12$. Поэтому 11 целых чисел прогрессия содержать не может.

Ответ. а) да; б) нет; в) 11.

Содержание критерия	Баллы
Верно выполнены: а), б), в)	4
Верно выполнены пункты а) и б) или а) и в)	3
Верно выполнен пункт а) или верно выполнен пункт б) и в пункте в) получена формула (2)	2
Верно выполнен пункт б) или в пункте в) получена формула (2) или в пункте а) не построен пример	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4