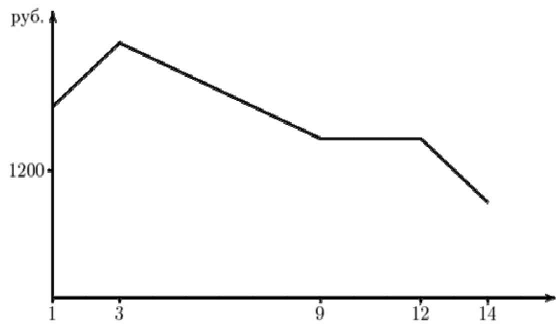
ВАРИАНТ №1

Часть 1

Ответом на задания В1 — В12 является целое число или конечная десятичная дробь. Ответ следует записать в бланк ответов №1 справа от номера выполняемого задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак минус и десятичную запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведенными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

В1. Аня купила месячный проездной билет на автобус. За месяц она сделала 40 поездок. Сколько рублей она сэкономила, если проездной билет стоит 207 рублей, а разовая поездка — 21 рубль?

В2. На графике, изображенном на рисунке, представлено изменение биржевой стоимости акций газодобывающей компании в первые две недели ноября. 2 ноября бизнесмен приобрел 10 акций этой компании. Шесть из них он продал 7 ноября, а 13 ноября — остальные 4. Сколько рублей потерял бизнесмен в результате этих операций (все операции проводились в момент открытия биржи)?



В3. Решите уравнение $\log_4(8-5x)=2\log_4 3$.

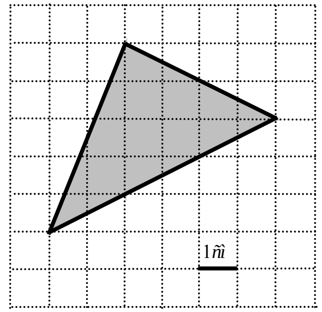
В4. В треугольнике ABC угол C равен $45°$, $AC=BC=2\sqrt{2}$. Найдите высоту AH этого треугольника.

В5. Для транспортировки 45 тонн груза на 1300 км можно использовать автомобили одного из трех перевозчиков. У каждого из них своя грузоподъемность используемых автомобилей и стоимость перевозки одним автомобилем.

Перевозчик	Стоимость перевозки одним автомобилем (руб. на 100 км)	Грузоподъемность автомобилей (тонн)
А	3200	3,5
Б	4100	5
В	9500	12

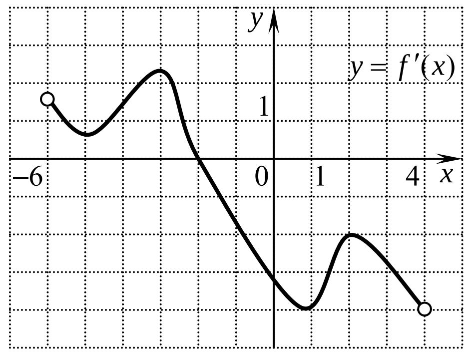
Сколько рублей придется заплатить за самую дешевую перевозку?

В6. На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см × 1 см изображен треугольник (см. рисунок). Найдите его площадь в квадратных сантиметрах.

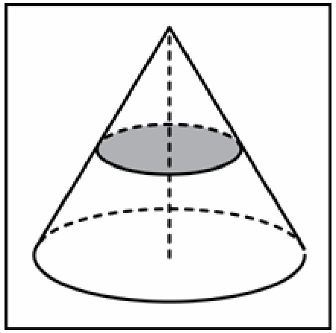


В7. Найдите значение выражения $\dfrac{x^{-17}\cdot x^{-1}}{x^{-21}}$ при $x=4$.

В8. Функция $y=f(x)$ определена на промежутке $(-6;4)$. На рисунке изображен график ее производной. Найдите абсциссу точки, в которой функция $y=f(x)$ принимает наибольшее значение.



B9. Объем конуса равен 16. Через середину высоты конуса параллельно его основанию проведено сечение, которое является основанием меньшего конуса с той же вершиной. Найдите объем меньшего конуса.



B10. Автомобиль, движущийся в начальный момент времени со скоростью $v_0 = 20$ м/с и тормозящий с постоянным ускорением $a = 4$ м/с^2, за t секунд после начала торможения проходит путь $S = v_0 t - \frac{at^2}{2}$. Определите (в секундах) наименьшее время, прошедшее от момента начала торможения, за которое автомобиль проехал не менее 32 метров.

B11. Найдите наибольшее значение функции $y = 15x - 3\sin x + 5$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2};\, 0\right]$.

B12. Два печника, работая вместе, могут сложить печь за 12 часов. Если сначала один первый печник будет работать 2 часа, а затем один второй — 3 часа, то они выполнят только 20% всей работы. За сколько часов может сложить печь один первый печник?

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания C1 — C6 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания, а затем полное обоснованное решение и ответ.

C1. Решите уравнение $\dfrac{2\sin^2 x + 2\sin x \cos 2x - 1}{\sqrt{\cos x}} = 0$.

C2. Длины всех ребер правильной четырехугольной пирамиды $PABCD$ с вершиной P равны между собой. Найдите угол между прямой BM и плоскостью BDP, если точка M — середина бокового ребра пирамиды AP.

C3. Решите неравенство $\dfrac{\log_4(x^4 - 4x^3 + 4x^2) + \log_{0,25}(6x^2 - 12x - 9)}{x^2 - 2x - 8} \geq 0$.

C4. Четырехугольник $ABCD$ описан около окружности и вписан в окружность. Прямые AB и DC пересекаются в точке M. Найдите площадь четырехугольника, если известно, что $\angle AMD = \alpha$ и радиусы окружностей, вписанных в треугольники BMC и AMD равны соответственно r и R.

C5. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} 4|y-3| = 12 - 3|x|, \\ y^2 - a^2 = 3(2y-3) - x^2 \end{cases}$$

имеет ровно четыре решения.

C6. Найдите все такие простые числа p, для каждого из которых существует такое целое число k, что число p является общим делителем чисел $k^4 + 12k^2 + 12$ и $k^3 + 9k$.

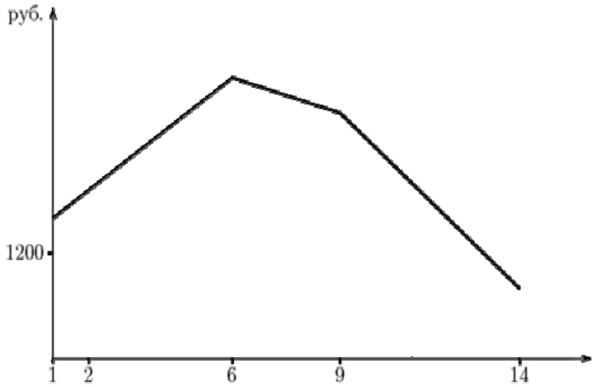
ВАРИАНТ №2

Часть 1

Ответом на задания В1 — В12 является целое число или конечная десятичная дробь. Ответ следует записать в бланк ответов №1 справа от номера выполняемого задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак минус и десятичную запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведенными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

В1. Железнодорожный билет для взрослого стоит 300 рублей. Стоимость билета для школьника составляет 50% от стоимости билета для взрослого. Группа состоит из 17 школьников и 3 взрослых. Сколько рублей стоят билеты на всю группу?

В2. На графике, изображенном на рисунке, представлено изменение биржевой стоимости акций нефтеперерабатывающей компании в первые две недели октября. 1 октября бизнесмен приобрел 10 акций этой компании. Три из них он продал 12 октября, а 13 октября продал остальные 7. Сколько рублей потерял бизнесмен в результате этих операций (все операции проводились в момент открытия биржи)?



В3. Решите уравнение $\log_5(5-5x)=3\log_5 2$.

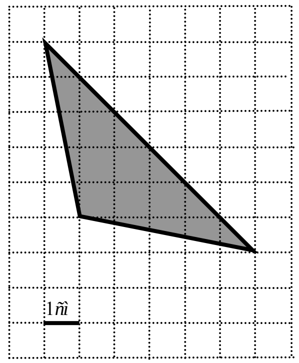
В4. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC боковая сторона AB равна 8, а $\cos A=\frac{\sqrt{7}}{4}$. Найдите высоту треугольника ABC, проведенную к основанию.

В5. Интернет-провайдер (компания, оказывающая услуги по подключению к сети Интернет) предлагает три тарифных плана.

Тарифный план	Абонентская плата	Плата за трафик
1. План "0"	Нет	2,5 руб. за 1 Mb.
2. План "500"	550 руб. за 500 Mb трафика в месяц	2 руб. за 1 Mb сверх 500 Mb.
3. План "800"	700 руб. за 800 Mb трафика в месяц	1,5 руб. за 1 Mb сверх 800 Mb.

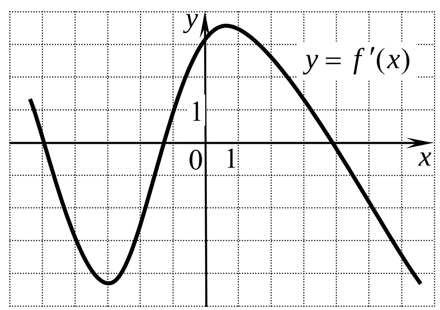
Пользователь планирует, что его трафик составит 600 Mb и, исходя из этого, выбирает наиболее дешевый тарифный план. Сколько рублей заплатит пользователь за месяц, если его трафик действительно будет равен 600 Mb?

В6. На клетчатой бумаге с клетками размером 1 см $\times$ 1 см изображен треугольник (см. рисунок). Найдите его площадь в квадратных сантиметрах.

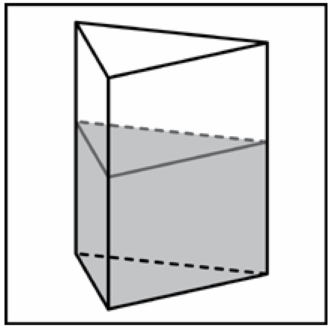


В7. Найдите значение выражения $\frac{x^{-11}\cdot x^{-3}}{x^{-19}}$ при $x=2$.

В8. На рисунке изображен график производной функции $y=f(x)$. При каком значении x эта функция принимает свое наибольшее значение на отрезке $[-4;-2]$?



B9. В сосуд, имеющий форму правильной треугольной призмы, налили воду. Уровень воды достигает 80 см. На какой высоте будет находиться уровень воды, если ее перелить в другой сосуд такой же формы, у которого сторона основания в 4 раза больше, чем у первого?



B10. Зависимость температуры (в градусах Кельвина) от времени (в минутах) для нагревательного элемента некоторого прибора была получена экспериментально и на исследуемом интервале температур задаётся выражением $T(t)=T_0+at+bt^2$, где $T_0=1160$ K, $a=34$ K/мин, $b=-0,2$ K/мин^2. Известно, что при температурах нагревателя свыше 2000 K прибор может испортиться, поэтому его нужно отключать. Определите (в минутах) через какое наибольшее время после начала работы нужно отключать прибор.

B11. Найдите наименьшее значение функции $y=3x-\ln(x+3)^3$ на отрезке $[-2,5;\,0]$.

B12. Две бригады, работая вместе, могут закончить уборку урожая за 8 дней. Если сначала одна первая бригада будет работать 3 дня, а затем одна вторая — 12 дней, то они выполнят 75% всей работы. За сколько дней может закончить уборку урожая одна вторая бригада?

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания С1 — С6 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания, а затем полное обоснованное решение и ответ.

C1. Решите уравнение $\dfrac{2\cos^2 x-2\cos x\cos 2x-1}{\sqrt{\sin x}}=0$.

C2. Длины всех ребер правильной четырехугольной пирамиды $PABCD$ равны между собой. Найдите угол между прямыми PH и BM, если отрезок PH — высота данной пирамиды, точка M — середина ее бокового ребра AP.

C3. Решите неравенство $\dfrac{\log_{0,5}(8x^2+24x-16)+\log_2(x^4+6x^3+9x^2)}{x^2+3x-10}\geq 0$.

C4. Четырехугольник $KLMN$ описан около окружности и вписан в окружность. Прямые KL и NM пересекаются в точке P. Найдите площадь треугольника KPN, если известно, что $\angle KPN=\varphi$ и радиусы окружностей, вписанных в треугольники KPN и LPM равны соответственно r и R.

C5. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} 5|x+2|=60-12|y|, \\ 4(x+1)+y^2=a^2-x^2 \end{cases}$$

имеет ровно восемь решений.

C6. Найдите все такие простые числа p, для каждого из которых существует такое целое число k, что число p является общим делителем чисел k^4+15k^2+35 и k^3+8k.

Ответы к заданиям варианта №1

B1	B2	B3	B4	B5	B6	B7	B8	B9	B10	B11	B12
633	5400	$-0,2$	2	479700	12	64	-2	2	2	5	20

C1	C2	C3
$\pm\frac{\pi}{4}+2\pi k,\ \frac{\pi}{6}+2\pi k;\ k\in \mathbf{Z}$	$\arcsin\frac{\sqrt{6}}{6}$	$(-\infty;-2)\cup\{-1;3\}\cup(4;+\infty)$

C4	C5	C6
$\frac{R(R^2-r^2)}{r}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2},\ \frac{r(r^2-R^2)}{R}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$	$a=\pm\frac{12}{5};\ -4<a<-3;\ 3<a<4$	2, 3, 5

Ответы к заданиям варианта №2

B1	B2	B3	B4	B5	B6	B7	B8	B9	B10	B11	B12
3450	2800	$-0,6$	6	700	12	32	-4	5	30	-6	24

C1	C2	C3
$\frac{\pi}{4}+2\pi k,\ \frac{3\pi}{4}+2\pi k,\ \frac{\pi}{3}+2\pi k;\ k\in \boldsymbol{Z}$	$\arccos\frac{\sqrt{6}}{6}$	$(-\infty;-5)\cup\{-4;1\}\cup(2;+\infty)$

C4	C5	C6
$Rr\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2},\ \frac{r^3}{R}\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}$	$-5<a<-\frac{60}{13},\ \frac{60}{13}<a<5$	3, 5, 7

Вариант 1. Критерии оценивания заданий С1 — С6

С1. Решите уравнение $\frac{2\sin^2 x+2\sin x\cos 2x-1}{\sqrt{\cos x}}=0$.

Решение. $\frac{2\sin^2 x+2\sin x\cos 2x-1}{\sqrt{\cos x}}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sin x\cos 2x-\cos 2x=0, \\ \cos x>0. \qquad (*) \end{cases}$

Решим уравнение $2\sin x\cos 2x-\cos 2x=0$:

$$2\sin x\cos 2x-\cos 2x=0 \Leftrightarrow \cos 2x(2\sin x-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 2x=0, \\ \sin x=\frac{1}{2}, \end{array}\right.$$

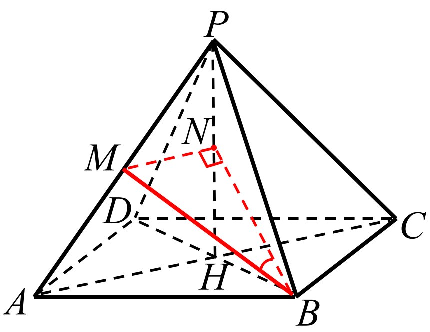
откуда $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2},\ x=\frac{\pi}{6}+2\pi k,\ x=\frac{5\pi}{6}+2\pi k;\ k\in \boldsymbol{Z}$. Из найденных решений условию $(*)$ удовлетворяют только $x=\pm\frac{\pi}{4}+2\pi k$ и $x=\frac{\pi}{6}+2\pi k$, $k\in \boldsymbol{Z}$.

Ответ: $\pm\frac{\pi}{4}+2\pi k,\ \frac{\pi}{6}+2\pi k;\ k\in \boldsymbol{Z}$.

Баллы	Критерии оценивания выполнения задания С1
2	В представленном решении обоснованно получен верный ответ.
1	Уравнение $2\sin^2 x+2\sin x\cos 2x-1=0$ решено верно, но из его решений неверно отобраны решения, удовлетворяющие условию $\cos x>0$ или допущена одна описка или вычислительная ошибка, не повлиявшие на ход решения, в результате которой может быть получен неверный ответ.
0	Решение неверно или отсутствует
2	***Максимальный балл***

С2. Длины всех ребер правильной четырехугольной пирамиды *PABCD* с вершиной *P* равны между собой. Найдите угол между прямой *BM* и плоскостью *BDP*, если точка *M* — середина бокового ребра пирамиды *AP*.

Решение. Пусть отрезок *PH* — высота пирамиды *PABCD*, отрезок *MN* — средняя линия треугольника *APH* (см. рисунок).



Поскольку *PABCD* — правильная пирамида, точка *H* — центр квадрата *ABCD*, значит, $AH\perp BD$ и $AH\perp PH$, откуда $AH\perp(BDP)$. Но $MN \parallel AH$, следовательно, $MN\perp(BDP)$. Таким образом, прямая *BN* — проекция прямой *BM* на плоскость *BDP*, значит, угол между прямой *BM* и плоскостью *BDP* равен углу между прямой *BM* и прямой *BN*, т.е. острому углу *MBN* прямоугольного треугольника *MBN*.

Пример длину ребра данной пирамиды за 1, тогда
$MB=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $AH=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $MN=\frac{\sqrt{2}}{4}$ и, следовательно, $\sin\angle MBN=\frac{MN}{MB}=\frac{\sqrt{6}}{6}$,
$\angle MBN=\arcsin\frac{\sqrt{6}}{6}$.

Ответ: $\arcsin\frac{\sqrt{6}}{6}$

Баллы	Критерии оценки выполнения задания С2
2	Верно описан и построен искомый угол. Все преобразования и вычисления выполнены верно. Получен верный ответ.
1	1) Правильный ход решения. Получен верный ответ, но имеется ошибка в построении и описании искомого угла, не повлиявшая на ход решения. 2) Правильный ход решения. Верно описан и построен искомый угол, но допущена одна описка или вычислительная ошибка, не повлиявшие на ход решения, в результате которой может быть получен неверный ответ.
0	1) Ход решения правильный, но оно не доведено до конца, или решение отсутствует. Нет ответа. 2) Ход решения правильный, но имеются существенные ошибки в вычислениях, приведшие к неправильному ответу. 3) Неправильный ход решения, приведший к неправильному ответу. 4) Верный ответ получен случайно при неверном решении или существенных ошибках в вычислениях.
2	***Максимальный балл***

<u>**Замечание.**</u> Критерии для оценивания выполнения задания С2 в случае решения задачи координатным методом

Баллы	Критерии оценки выполнения задания С2
2	Верно выбрана система координат и определены координаты необходимых точек и векторов. Все преобразования и вычисления выполнены верно. Получен верный ответ.
1	Верно выбрана система координат и определены координаты необходимых точек и векторов. Правильный ход решения, но допущена одна описка или вычислительная ошибка, не повлиявшие на ход решения, в результате которой может быть получен неверный ответ.
0	1) Ход решения правильный, но оно не доведено до конца, или решение отсутствует. Нет ответа. 2) Ход решения правильный, но имеются принципиальные ошибки в вычислениях, приведшие к неправильному ответу. 3) Неправильный ход решения, приведший к неправильному ответу. 4) Верный ответ получен случайно при неверном решении или существенных ошибках в вычислениях.
2	***Максимальный балл***

С3. Решите неравенство $\dfrac{\log_4(x^4-4x^3+4x^2)+\log_{0,25}(6x^2-12x-9)}{x^2-2x-8} \geq 0$.

Решение. $\dfrac{\log_4(x^4-4x^3+4x^2)+\log_{0,25}(6x^2-12x-9)}{x^2-2x-8} \geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{\log_4(x^2-2x)^2-\log_4(6(x^2-2x)-9)}{(x^2-2x)-8} \geq 0$.

Сделав замену переменной $t = x^2 - 2x$, получаем:

$$\frac{\log_4 t^2-\log_4(6t-9)}{t-8} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{t^2-6t+9}{t-8} \geq 0, \\ t > 1{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(t-3)^2}{t-8} \geq 0, \\ t > 1{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &t = 3, \\ &t > 8. \end{aligned}\right.$$

1) $x^2-2x=3 \Leftrightarrow x^2-2x-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1, \\ x=3. \end{array}\right.$

2) $x^2-2x>8 \Leftrightarrow x^2-2x-8>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<-2, \\ x>4. \end{array}\right.$

Ответ: $(-\infty;-2)\cup\{-1;3\}\cup(4;+\infty)$.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания С3
3	В представленном решении обоснованно получен верный ответ.
2	Ответ неточен, так как допущена описка или, при правильном, в основном, решении, в ответ включены посторонние корни — концы промежутков.
1	Решение содержит верные преобразования. Из-за ошибок потеряны решения или промежутки решений или в ответ включены лишние промежутки.
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.
3	***Максимальный балл***

С4. Четырехугольник $ABCD$ описан около окружности и вписан в окружность. Прямые AB и DC пересекаются в точке M. Найдите площадь четырехугольника, если известно, что $\angle AMD=\alpha$ и радиусы окружностей, вписанных в треугольники BMC и AMD равны соответственно r и R.

Решение.

1 случай. Лучи AB и DC пересекаются в точке M (см. рисунок 1).

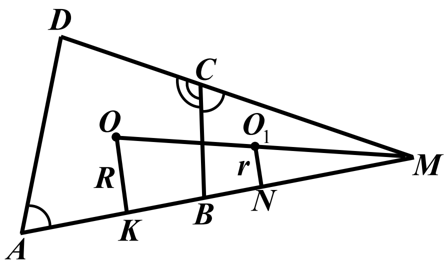


*Рис.*1

Центры O_1 и O окружностей, вписанных в треугольники BMC и AMD соответственно, лежат на биссектрисе MO угла AMD. Окружность, вписанная в четырехугольник $ABCD$, является также окружностью, вписанной в треугольник AMD и вневписанной окружностью треугольника BMC. Будем искать площадь четырехугольника $ABCD$ как разность площадей треугольников AMD и BMC.

Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность, следовательно $\angle BAD+\angle BCD=180°$. Но $\angle BCM+\angle BCD=180°$, откуда $\angle BCM=\angle BAD$. Так как треугольники BMC и AMD имеют еще общий угол AMD, они подобны, причем коэффициент подобия равен отношению радиусов окружностей, вписанных в эти треугольники.

Далее имеем:

1) $S_{ABCD}=S_{\Delta ADM}-S_{\Delta BCM}=\frac{R^2}{r^2}S_{\Delta BCM}-S_{\Delta BCM}=\left(\frac{R^2}{r^2}-1\right)S_{\Delta BCM}$. $(*)$

2) $S_{\Delta BCM}=pr$, где p — полупериметр треугольника BCM, равный длине отрезка KM.

3) Из прямоугольного треугольника OKM находим $KM=OK\operatorname{ctg}\angle OMK=R\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$,

откуда $S_{\Delta BCM}=Rr\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$.

Подставляя найденное значение $S_{\Delta BCM}$ в формулу (*), окончательно получаем

$$S_{ABCD} = \left(\frac{R^2}{r^2} - 1\right) Rr \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \frac{R(R^2 - r^2)}{r} \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}.$$

2 случай. Лучи BA и CD пересекаются в точке M (см. рисунок 2).

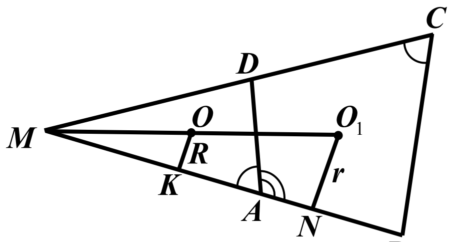


*Рис.*2

Аналогично первому случаю имеем: $S_{ABCD} = S_{\Delta BCM} - S_{\Delta ADM} = \frac{r^2}{R^2} S_{\Delta ADM} - S_{\Delta ADM} =$

$= \left(\frac{r^2}{R^2} - 1\right) S_{\Delta ADM}$; $S_{\Delta ADM} = pR$, где $p = r\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$; $S_{\Delta ADM} = Rr\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$; $S_{ABCD} = \frac{r(r^2 - R^2)}{R}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$.

Ответ: $\frac{R(R^2 - r^2)}{r}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$ или $\frac{r(r^2 - R^2)}{R}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания С4
3	Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации, и обоснованно получен правильный ответ.
2	Рассмотрена хотя бы одна из возможных геометрических конфигураций, для которой получено правильное значение искомой величины.
1	Рассмотрена хотя бы одна из возможных геометрических конфигураций, в которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки (описки).
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.
3	***Максимальный балл***

С5. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} 4|y-3| = 12 - 3|x|, \\ y^2 - a^2 = 3(2y-3) - x^2 \end{cases}$$

имеет ровно четыре решения.

Решение. Преобразуем данную систему:

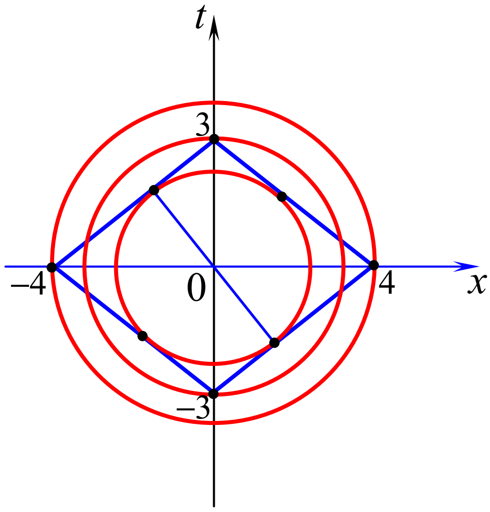
$$\begin{cases} 3|x| + 4|y-3| = 12, \\ x^2 + y^2 - 6y + 9 = a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3|x| + 4|y-3| = 12, \\ x^2 + (y-3)^2 = a^2. \end{cases}$$

Сделав замену переменной $t = y - 3$, получаем систему

$$\begin{cases} 3|x| + 4|t| = 12, & (1) \\ x^2 + t^2 = a^2. & (2) \end{cases}$$

Заметим, что количество решений полученной системы совпадает с количеством решений исходной системы. Построим графики уравнений (1) и (2) в системе координат Oxt.

График первого уравнения — ромб, диагонали которого, равные 8 и 6, лежат соответственно на осях Ox и Ot, а графиком второго уравнения является окружность с центром в начале координат и радиусом $r=|a|$ (см. рисунок).



Графики уравнений системы имеют ровно четыре общих точки, и, следовательно, система имеет ровно четыре решения, тогда и только тогда, когда окружность либо вписана в ромб, либо ее радиус удовлетворяет условию $3<r<4$.

В первом случае радиус окружности является высотой прямоугольного треугольника с катетами, равными 3 и 4, откуда $r=|a|=\frac{3\cdot 4}{5}=\frac{12}{5}$, $a=\pm\frac{12}{5}$.

Во втором случае получаем $3<|a|<4$, откуда $-4<a<-3$; $3<a<4$.

Ответ: $a=\pm\frac{12}{5}$; $-4<a<-3$; $3<a<4$.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания С5
4	В представленном решении обоснованно получен верный ответ.
3	Ответ обоснован, но допущена описка или вычислительная ошибка, не повлиявшие на ход решения, в результате которой получен неверный ответ.
2	Решение опирается на верное рассуждение, но в этом рассуждении допущена существенная ошибка (например, не рассмотрен случай касания), в результате которой получен неверный ответ.
1	Есть некоторое продвижение в нужном направлении, но задача не доведена до конца (ответ не получен или неверен).
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.
4	***Максимальный балл***

Замечание. Критерии для оценивания выполнения задания С5 можно сформулировать менее формально

- Если ученик **продемонстрировал** верное понимание того, что задача сводится к изучению количества точек пересечения окружности и ромба, то это **— 1 балл**;
- Если ученик реализовал (довел до ответа) это понимание хотя бы в одном случае, то это **— 2 балла**;
- **3 балла** отличаются от 4 баллов, как обычно, лишь наличием неточностей.

С6. Найдите все такие простые числа p, для каждого из которых существует такое целое число k, что число p является общим делителем чисел k^4+12k^2+12 и k^3+9k.

Решение. Если число p является делителем числа k^3+9k, то оно является также и делителем числа $k(k^3+9k)=k^4+9k^2$. Но если число p является общим делителем чисел k^4+12k^2+12 и k^4+9k^2, то оно является также и делителем разности этих чисел, т.е. числа $(k^4+12k^2+12)-(k^4+9k^2)=3k^2+12$.

Аналогично, получаем:

1) число p является общим делителем чисел k^3+9k и $3k^2+12$, значит, p является делителем числа $3(k^3+9k)-k(3k^2+12)=15k$;

2) число p является общим делителем чисел $15k$ и $3k^2+12$, значит, p является делителем числа $5(3k^2+12)-k\cdot 15k=60$.

Число 60 имеет ровно три различных простых делителя — 2, 3 и 5.

Остается проверить, найдутся ли такие целые числа k, для каждого из которых одно из чисел 2, 3 или 5 является общим делителем чисел k^4+12k^2+12 и k^3+9k.

Если число k — четное, то число 2 является общим делителем данных чисел;

если число k кратно 3, то число 3 является общим делителем данных чисел;

если $k=1$, то число 5 является общим делителем данных чисел.

Ответ: 2, 3, 5.

Баллы	**Критерии оценки выполнения задания С6**
4	В представленном решении обоснованно получен верный ответ.
3	Ответ обоснован, но неверен из-за арифметической ошибки.
2	Ответ верен и получен конечным перебором, но конечность перебора не обоснована
1	Ответ неполон, но приведен и проверен хотя бы один из правильных наборов (например: $k=1$, $p=5$).
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.
4	***Максимальный балл***

Вариант 2. Критерии оценивания заданий С1 — С6

С1. Решите уравнение $\frac{2\cos^2 x - 2\cos x\cos 2x - 1}{\sqrt{\sin x}} = 0$.

Решение. $\frac{2\cos^2 x - 2\cos x\cos 2x - 1}{\sqrt{\sin x}} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases}\cos 2x - 2\cos x\cos 2x = 0,\\ \sin x > 0. \qquad (*)\end{cases}$

Решим уравнение $\cos 2x - 2\cos x\cos 2x = 0$:

$$\cos 2x - 2\cos x\cos 2x = 0 \Leftrightarrow \cos 2x(1 - 2\cos x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 2x = 0,\\ \cos x = \frac{1}{2},\end{array}\right.$$

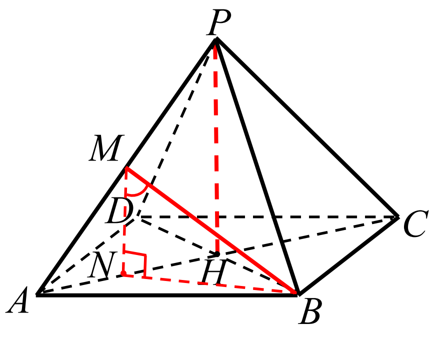
откуда $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$, $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k$; $k \in \boldsymbol{Z}$. Из найденных решений условию $(*)$ удовлетворяют только $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k$, $x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k$ и $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Ответ: $\frac{\pi}{4} + 2\pi k,\ \frac{3\pi}{4} + 2\pi k,\ \frac{\pi}{3} + 2\pi k;\ k \in \boldsymbol{Z}$.

Баллы	Критерии оценивания выполнения задания С1
2	В представленном решении обоснованно получен верный ответ.
1	Уравнение $2\sin^2 x + 2\sin x\cos 2x - 1 = 0$ решено верно, но из его решений неверно отобраны решения, удовлетворяющие условию $\cos x > 0$ или допущена одна описка или вычислительная ошибка, не повлиявшие на ход решения, в результате которой может быть получен неверный ответ.
0	Решение неверно или отсутствует
2	***Максимальный балл***

С2. Длины всех ребер правильной четырехугольной пирамиды *PABCD* равны между собой. Найдите угол между прямыми *PH* и *BM*, если отрезок *PH* — высота данной пирамиды, точка *M* — середина ее бокового ребра *AP*.

Решение. Пусть отрезок *MN* — средняя линия треугольника *APH*, параллельная его стороне *PH*. (см. рисунок).



Поскольку *PABCD* — правильная пирамида, точка *H* — центр квадрата *ABCD*. Так как $PH \perp (ABC)$ и $MN \parallel PH$, то $MN \perp (ABC)$, а, значит, $MN \perp BN$. Прямые *MN* и *PH* параллельны, следовательно, угол между прямыми *PH* и *BM* равен углу между прямыми *MN* и *BM*, т.е. острому углу *BMN* прямоугольного треугольника *BMN*.

Пример длину ребра данной пирамиды за 1, тогда

$MB = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $AH = PH = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $MN = \frac{1}{2}PH = \frac{\sqrt{2}}{4}$ и, следовательно, $\cos\angle BMN = \frac{MN}{MB} = \frac{\sqrt{6}}{6}$,

$\angle BMN = \arccos\frac{\sqrt{6}}{6}$.

Ответ: $\arccos\frac{\sqrt{6}}{6}$

Баллы	Критерии оценки выполнения задания С2
2	Верно описан и построен искомый угол. Все преобразования и вычисления выполнены верно. Получен верный ответ.
1	1) Правильный ход решения. Получен верный ответ, но имеется ошибка в построении и описании искомого угла, не повлиявшая на ход решения. 2) Правильный ход решения. Верно описан и построен искомый угол, но допущена одна описка или вычислительная ошибка, не повлиявшие на ход решения, в результате которой может быть получен неверный ответ.
0	1) Ход решения правильный, но оно не доведено до конца, или решение отсутствует. Нет ответа. 2) Ход решения правильный, но имеются существенные ошибки в вычислениях, приведшие к неправильному ответу. 3) Неправильный ход решения, приведший к неправильному ответу. 4) Верный ответ получен случайно при неверном решении или существенных ошибках в вычислениях.
2	***Максимальный балл***

Замечание. Критерии для оценивания выполнения задания С2 в случае решения задачи координатным методом

Баллы	Критерии оценки выполнения задания С2
2	Верно выбрана система координат и определены координаты необходимых точек и векторов. Все преобразования и вычисления выполнены верно. Получен верный ответ.
1	Верно выбрана система координат и определены координаты необходимых точек и векторов. Правильный ход решения, но допущена одна описка или вычислительная ошибка, не повлиявшие на ход решения, в результате которой может быть получен неверный ответ.
0	1) Ход решения правильный, но оно не доведено до конца, или решение отсутствует. Нет ответа. 2) Ход решения правильный, но имеются принципиальные ошибки в вычислениях, приведшие к неправильному ответу. 3) Неправильный ход решения, приведший к неправильному ответу. 4) Верный ответ получен случайно при неверном решении или существенных ошибках в вычислениях.
2	***Максимальный балл***

С3. Решите неравенство $\dfrac{\log_{0,5}(8x^2+24x-16)+\log_2(x^4+6x^3+9x^2)}{x^2+3x-10} \ge 0$.

Решение. $\dfrac{\log_{0,5}(8x^2+24x-16)+\log_2(x^4+6x^3+9x^2)}{x^2+3x-10} \ge 0 \Leftrightarrow \dfrac{\log_2(x^2+3x)^2-\log_2(8(x^2+3x)-16)}{(x^2+3x)-10} \ge 0$.

Сделав замену переменной $t = x^2+3x$, получаем:

$$\frac{\log_3 t^2-\log_2(8t-16)}{t-10} \ge 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{t^2-8t+16}{t-10} \ge 0, \\ t > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(t-4)^2}{t-10} \ge 0, \\ t > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 4, \\ t > 10. \end{array}\right.$$

1) $x^2+3x=4 \Leftrightarrow x^2+3x-4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-4, \\ x=1. \end{array}\right.$

2) $x^2+3x>10 \Leftrightarrow x^2+3x-10>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<-5, \\ x>2. \end{array}\right.$

Ответ: $(-\infty;-5)\cup\{-4;1\}\cup(2;+\infty)$

Баллы	Критерии оценки выполнения задания С3
3	В представленном решении обоснованно получен верный ответ.
2	Ответ неточен, так как допущена описка или, при правильном, в основном, решении, в ответ включены посторонние корни — концы промежутков.
1	Решение содержит верные преобразования. Из-за ошибок потеряны решения или промежутки решений или в ответ включены лишние промежутки.
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.
3	***Максимальный балл***

С4. Четырехугольник $KLMN$ описан около окружности и вписан в окружность. Прямые KL и NM пересекаются в точке P. Найдите площадь треугольника KPN, если известно, что $\angle KPN=\varphi$ и радиусы окружностей, вписанных в треугольники KPN и LPM равны соответственно r и R.

Решение.

1 случай. Лучи KL и NM пересекаются в точке P (см. рисунок 1).

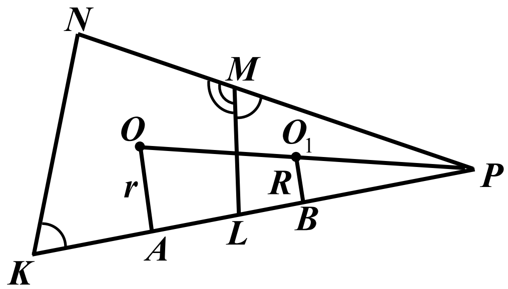


*Рис.*1

Центры O и O_1 окружностей, вписанных в треугольники KPN и LPM соответственно, лежат на биссектрисе MO угла KPN. Окружность, вписанная в четырехугольник $KLMN$, является также окружностью, вписанной в треугольник KPN и вневписанной окружностью треугольника LPM.

Четырехугольник $KLMN$ вписан в окружность, следовательно $\angle LKN+\angle LMN=180°$. Но $\angle LMP+\angle LMN=180°$, откуда $\angle LKN=\angle LMP$. Так как треугольники KPN и LPM имеют еще общий угол KPN, они подобны, причем коэффициент подобия равен отношению радиусов окружностей, вписанных в эти треугольники.

Далее имеем:

1) $S_{\Delta KPN}=\dfrac{r^2}{R^2}\,S_{\Delta LPM}$. $(*)$

2) $S_{\Delta LPM}=pR$, где p — полупериметр треугольника LPM, равный длине отрезка AP.

3) Из прямоугольного треугольника OAP находим $AP=OA\operatorname{ctg}\angle OPA=r\operatorname{ctg}\dfrac{\varphi}{2}$,

откуда $S_{\Delta LPM}=Rr\operatorname{ctg}\dfrac{\varphi}{2}$.

Подставляя найденное значение $S_{\Delta LPM}$ в формулу (*), окончательно получаем

$$S_{ABCD} = \frac{r^2}{R^2}\cdot Rr\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2} = \frac{r^3}{R}\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}.$$

2 случай. Лучи LK и MN пересекаются в точке P (см. рисунок 2).

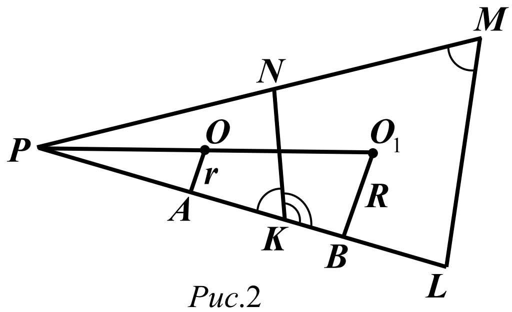


Рис.2

Аналогично первому случаю имеем:

$$S_{\Delta KPN} = pr\text{; где } p = BP = O_1B\operatorname{ctg}\angle O_1PB = R\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2};\ \ S_{\Delta KPN} = Rr\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}.$$

Ответ: $\frac{r^3}{R}\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}$ или $Rr\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}$.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания С4
3	Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации, и обоснованно получен правильный ответ.
2	Рассмотрена хотя бы одна из возможных геометрических конфигураций, для которой получено правильное значение искомой величины.
1	Рассмотрена хотя бы одна из возможных геометрических конфигураций, в которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки (описки).
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.
3	***Максимальный балл***

С5. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} 5|x+2| = 60 - 12|y|, \\ 4(x+1) + y^2 = a^2 - x^2 \end{cases}$$

имеет ровно восемь решения.

Решение. Преобразуем данную систему:

$$\begin{cases} 5|x+2| = 60 - 12|y|, \\ 4(x+1) + y^2 = a^2 - x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5|x+2| + 12|y| = 60, \\ (x+2)^2 + y^2 = a^2. \end{cases}$$

Сделав замену переменной $t = x + 2$, получаем систему

$$\begin{cases} 5|t| + 12|y| = 60, & (1) \\ t^2 + y^2 = a^2. & (2) \end{cases}$$

Заметим, что количество решений полученной системы совпадает с количеством решений исходной системы.

Построим графики уравнений (1) и (2) в системе координат Oty.

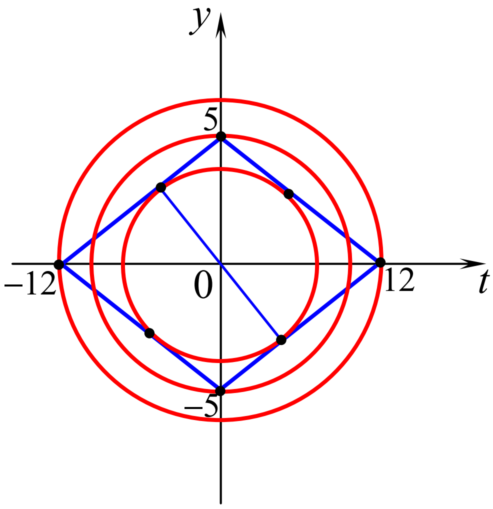


График первого уравнения — ромб, диагонали которого, равные 24 и 10, лежат соответственно на осях Ot и Oy, а графиком второго уравнения является окружность с центром в начале координат и радиусом $r = |a|$ (см. рисунок).

Графики уравнений системы имеют ровно восемь общих точек, и, следовательно, система имеет ровно восемь решений, тогда и только тогда, когда радиус окружности удовлетворяет условию $r_1 < r < 5$, где r_1 — радиус окружности, вписанной в ромб. Этот радиус равен высоте прямоугольного треугольника с катетами, равными 5 и 12, откуда $r = \frac{5 \cdot 12}{13} = \frac{60}{13}$.

Таким образом, $\frac{60}{13} < |a| < 5$, откуда $-5 < a < -\frac{60}{13}$; $\frac{60}{13} < a < 5$.

Ответ: $-5 < a < -\frac{60}{13}$, $\frac{60}{13} < a < 5$.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания С5
4	В представленном решении обоснованно получен верный ответ.
3	Ответ обоснован, но допущена описка или вычислительная ошибка, не повлиявшие на ход решения, в результате которой получен неверный ответ.
2	Решение опирается на верное рассуждение, но в этом рассуждении допущена существенная ошибка (например, в ответ включены концы (конец) промежутков), в результате которой получен неверный ответ.
1	Есть некоторое продвижение в нужном направлении, но задача не доведена до конца (ответ не получен или неверен).
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.
4	***Максимальный балл***

Замечание. Критерии для оценивания выполнения задания С5 можно сформулировать менее формально

- Если ученик **продемонстрировал** верное понимание того, что задача сводится к изучению количества точек пересечения окружности и ромба, то это **— 1 балл**;
- Если ученик реализовал (довел до ответа) это понимание хотя бы и с существенной ошибкой, то это **— 2 балла**;
- **3 балла** отличаются от 4 баллов, как обычно, лишь наличием неточностей.

С6. Найдите все такие простые числа p, для каждого из которых существует такое целое число k, что число p является общим делителем чисел $k^4 + 15k^2 + 35$ и $k^3 + 8k$.

Решение. Если число p является делителем числа k^3+8k, то оно является также и делителем числа $k(k^3+8k)=k^4+8k^2$. Но если число p является общим делителем чисел k^4+15k^2+35 и k^4+8k^2, то оно является также и делителем разности этих чисел, т.е. числа $(k^4+15k^2+35)-(k^4+8k^2)=7k^2+35$.

Аналогично, получаем:

1) число p является общим делителем чисел k^3+8k и $7k^2+35$, значит, p является делителем числа $7(k^3+8k)-k(7k^2+35)=21k$;
2) число p является общим делителем чисел $21k$ и $7k^2+35$, значит, p является делителем числа $3(7k^2+35)-k\cdot 21k=105$.

Число 105 имеет ровно три различных простых делителя — 3, 5 и 7.

Остается проверить, найдутся ли такие целые числа k, для каждого из которых одно из чисел 3, 5 или 7 является общим делителем чисел k^4+15k^2+35 и k^3+8k.

Если $k=1$, то число 3 является общим делителем данных чисел;
если число k кратно 5, то число 5 является общим делителем данных чисел;
если число k кратно 7, то число 7 является общим делителем данных чисел.

Замечание. Последние два условия могут быть объединить в одно:
если число k кратно 35, то числа 5 и 7 являются общими делителями данных чисел.

Ответ: 3, 5, 7.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания С6
4	В представленном решении обоснованно получен верный ответ.
3	Ответ обоснован, но неверен из-за арифметической ошибки.
2	Ответ верен и получен конечным перебором, но конечность перебора не обоснована
1	Ответ неполон, но приведен и проверен хотя бы один из правильных наборов (например: k кратно 5, $p=5$).
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.
4	***Максимальный балл***