Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

C1 Решите уравнение $\dfrac{3\cos 2x+5\cos x-1}{\sqrt{-\operatorname{ctg} x}}=0$.

Уравнение равносильно системе

$$\begin{cases}3\cos 2x+5\cos x-1=0,\\ \operatorname{ctg} x<0.\end{cases}$$

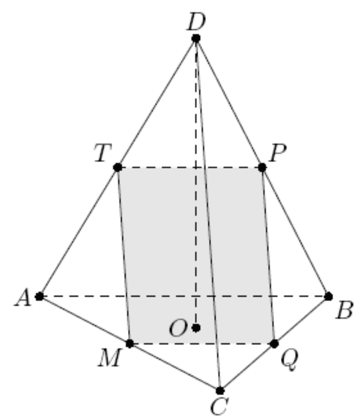
Уравнение системы приводится к виду $6\cos^2 x+5\cos x-4=0$, откуда $\cos x=\dfrac{1}{2}$ или $\cos x=-\dfrac{4}{3}$. Уравнение $\cos x=-\dfrac{4}{3}$ не имеет решений. Учитывая, что $\operatorname{ctg} x<0$, получаем: $x=-\dfrac{\pi}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

Ответ: $-\dfrac{\pi}{3}+2k\pi,\ k=0,\pm1,\pm2,\pm3,\ldots$.

Содержание критерия	Баллы
Получен верный обоснованный ответ	2
Верно решено тригонометрическое уравнение, но отбор корней выполнен неверно или не выполнен	1
Решение отсутствует или неверно решено тригонометрическое уравнение	0

C2 Дана правильная треугольная пирамида $DABC$ с вершиной D. Боковое ребро пирамиды равно $\sqrt{43}$, высота равна $\sqrt{31}$. Найдите расстояние от середины бокового ребра BD до прямой MT, где точки M и T — середины ребер AC и AD соответственно.

Пусть P — середина ребра BD, Q — середина ребра BC. По теореме о средней линии треугольника $MT\|CD\|QP$; следовательно, точки M, T, P, Q лежат в одной плоскости. $MT=\dfrac{1}{2}CD=QP$, следовательно, точки M, T, P, Q являются вершинами параллелограмма. Кроме того, $PT\parallel AB$, а по теореме о трёх перпендикулярах $AB\perp CD$ (так как $AB\perp CO$), поэтому этот параллелограмм — прямоугольник. Значит, искомое расстояние есть длина отрезка PT. По теореме Пифагора



$AO=\sqrt{AD^2-DO^2}=2\sqrt{3}$; тогда $AB=\sqrt{3}\cdot AO=6$, а $PT=\dfrac{1}{2}AB=3$.

Ответ: 3.

Содержание критерия	Баллы
Получен верный обоснованный ответ	2
В решении указан отрезок, длина которого равна искомому расстоянию, имеется указание на способ его получения (например, указано, из какой фигуры этот отрезок можно найти), однако решение не окончено или содержит вычислительную ошибку	1
Решение отсутствует или содержит ошибку геометрического характера, способ нахождения искомого расстояния не описан или неверен	0

C3 Решите неравенство $\dfrac{x^4+6x^3+9x^2-6\left(x^2+3x\right)+10}{x^2+3x-3}\le 2$.

Выполним преобразования: $\dfrac{\left(x^2+3x\right)^2-6\left(x^2+3x\right)+9}{x^2+3x-3}+\dfrac{1}{x^2+3x-3}\le 2$;

$\dfrac{\left(x^2+3x-3\right)^2}{x^2+3x-3}+\dfrac{1}{x^2+3x-3}\le 2$; $x^2+3x-3+\dfrac{1}{x^2+3x-3}\le 2$.

Сделаем замену: $a=x^2+3x-3$. Получим: $a+\dfrac{1}{a}\le 2$, откуда $\dfrac{a^2-2a+1}{a}\le 0$;

$\dfrac{(a-1)^2}{a}\le 0$.

Решая это неравенство, находим: $a=1$ или $a<0$.

Если $x^2+3x-3=1$, то $x=-4$ или $x=1$.

Если $x^2+3x-3<0$, то $-\dfrac{\sqrt{21}+3}{2}<x<\dfrac{\sqrt{21}-3}{2}$.

Ответ: $1,-4,\left(-\dfrac{\sqrt{21}+3}{2};\ \dfrac{\sqrt{21}-3}{2}\right)$.

Содержание критерия	Баллы
Получен верный обоснованный ответ	3
Решение в целом верное, однако содержит вычислительную ошибку, возможно, приведшую к неверному ответу	2
Получен только промежуток или только точечные решения	1
Решение отсутствует, не закончено, либо метод решения неверный	0

C4 На стороне CD квадрата $ABCD$ построен равносторонний треугольник CPD. Найдите высоту треугольника ABP, проведённую из вершины A, если известно, что сторона квадрата равна 1.

Пусть точки P и A лежат по одну сторону от прямой CD (рис.1). Треугольник BCP — равнобедренный ($BC=CD=CP=1$), поэтому

$$\angle CBP = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle BCP) = \frac{1}{2}(180^\circ - (90^\circ - 60^\circ)) = 75^\circ,$$

значит,

$$\angle ABP = 90^\circ - 75^\circ = 15^\circ.$$

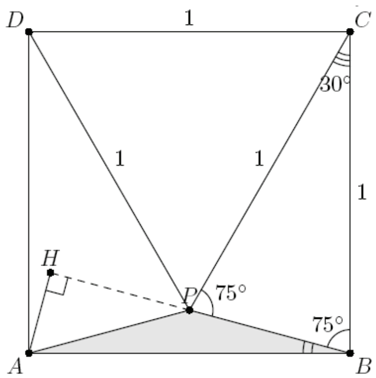


Рис.1

Пусть AH — высота треугольника ABP. Из прямоугольного треугольника ABH находим, что

$$AH = AB\sin\angle ABH = AB\sin\angle ABP = 1\cdot\sin 15^\circ = \sin 15^\circ = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

Пусть теперь точки P и A лежат по разные стороны от прямой CD (рис.2). Треугольник BCP — равнобедренный ($BC=CD=CP=1$), поэтому

$$\angle CBP = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle BCP) = \frac{1}{2}(180^\circ - (90^\circ + 60^\circ)) = 15^\circ,$$

значит,

$$\angle ABP = 90^\circ - 15^\circ = 75^\circ.$$

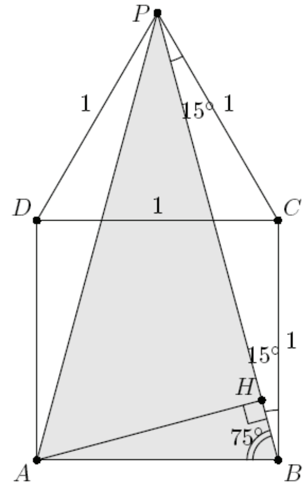


Рис.2

Из прямоугольного треугольника ABH находим, что

$$AH = AB\sin\angle ABH = AB\sin\angle ABP = 1\cdot\sin 75^\circ = \sin 75^\circ = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ или $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

Содержание критерия	**Баллы**
Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации и получен правильный ответ	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, для которой получено правильное значение искомой величины	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, для которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

C5 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} x^2+12x+|y|+27=0, \\ x^2+(y-a)(y+a)=-12(x+3) \end{cases}$$

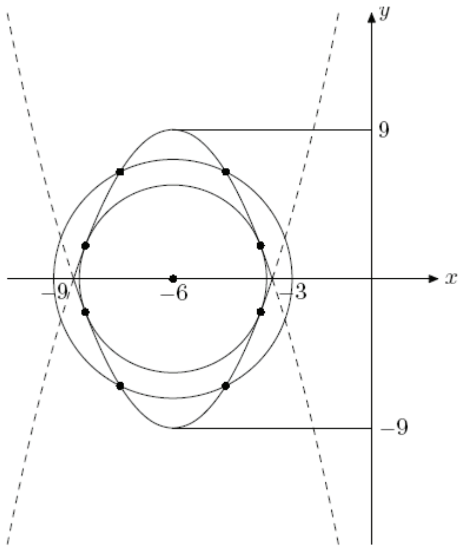
имеет ровно 4 решения.

Преобразуем систему:

$$\begin{cases} |y|=9-(x+6)^2, \\ (x+6)^2+y^2=a^2. \end{cases}$$

Первое уравнение задает части двух парабол: $y=\begin{cases} 9-(x+6)^2, & y\ge 0, \\ (x+6)^2-9, & y<0 \end{cases}$

(см. рисунок).



Второе уравнение задает окружность радиусом $|a|$ с центром $(-6;0)$.

На рисунке видно, что четыре решения системы получаются в двух случаях.

1. Окружность касается каждой из ветвей обеих парабол.

2. Окружность пересекает каждую из ветвей обеих парабол в двух точках, лежащих по разные стороны от оси абсцисс.

Составим уравнение для ординат общих точек окружности и параболы $y=9-(x+6)^2$. Получим: $y=9-(a^2-y^2)$, откуда $y^2-y+(9-a^2)=0$.

Чтобы окружность касалась парабол, уравнение должно иметь нулевой дискриминант: $1+4a^2-36=0$, откуда $a=\pm\frac{\sqrt{35}}{2}$.

Во втором случае радиус окружности заключен между числами 3 и 9.

Ответ: $(-9,-3), -\frac{\sqrt{35}}{2}, \frac{\sqrt{35}}{2}, (3,9)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
Решение в целом верное, однако содержит вычислительную ошибку, возможно, приведшую к неверному ответу	3
Получена верная геометрическая интерпретация, числовые значения границ промежутков значений параметра не найдены, например, решение не закончено или составлены неверные уравнения	2
Геометрическая интерпретация неполная. Ответ имеется для неполной геометрической конфигурации	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

C6 Найдите все простые числа b, для каждого из которых существует такое целое число a, что дробь $\frac{a^4+12a^2-5}{a^3+11a}$ можно сократить на b.

Если целые числа a^4+12a^2-5 и a^3+11a делятся на b, то целое число $(a^4+12a^2-5)-a(a^3+11a)=a^2-5$ также делится на b.

Тогда число $(a^3+11a)-a(a^2-5)=16a$ тоже делится на b.

Тогда число $16(a^2-5)-a(16a)=-80$ также делится на b.

Таким образом, искомое b — простой делитель числа 80, то есть 2 или 5.
Осталось проверить, для каких из найденных чисел можно подобрать a.
Если a нечетное, то числитель и знаменатель данной дроби четные числа, поэтому дробь можно сократить на 2.
Если a кратно 5, то числитель и знаменатель данной дроби также кратны 5, поэтому дробь можно сократить на 5.
Ответ: 2, 5.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
Задача решена для натуральных или целых чисел (в ответ включены все возможные натуральные или даже целые b, а не только простые) и доказано, что других делителей быть не может	3
В решении имеется полный перебор по a или по b или применена другая плодотворная идея (например, алгоритм Евклида), однако допущена вычислительная ошибка, возможно, приведшая к неверному ответу	2
Найдены верные значения (например, перебором) и показано, что для этих чисел дробь сократима, но доказательства отсутствия других решений нет или оно неверно, даже если в ответ включены некоторые или все не простые целые делители	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0