МАТЕМАТИКА ЕГЭ 2011

Отбор корней в тригонометрических уравнениях (типовые задания С1)

Корянов А. Г. г. Брянск
akoryanov@mail.ru
Прокофьев А.А. г. Москва
aaprokof@yandex.ru

СОДЕРЖАНИЕ

1. Способы отбора корней в тригонометрических уравнениях

При отборе корней в процессе решения тригонометрических уравнений обычно используют один из следующих способов.

● Арифметический способ:

а) непосредственная подстановка полученных корней в уравнение и имеющиеся ограничения;

б) перебор значений целочисленного параметра и вычисление корней.

● Алгебраический способ:

а) решение неравенства относительно неизвестного целочисленного параметра и вычисление корней;

б) исследование уравнения с двумя целочисленными параметрами.

● Геометрический способ

а) изображение корней на тригонометрической окружности с последующим отбором с учетом имеющихся ограничений;

б) изображение корней на числовой прямой с последующим отбором с учетом имеющихся ограничений.

2. Отбор общих корней в нескольких сериях решений тригонометрического уравнения

Пример 1. Решить уравнение:

$$\cos x\cos 5x = 0.$$

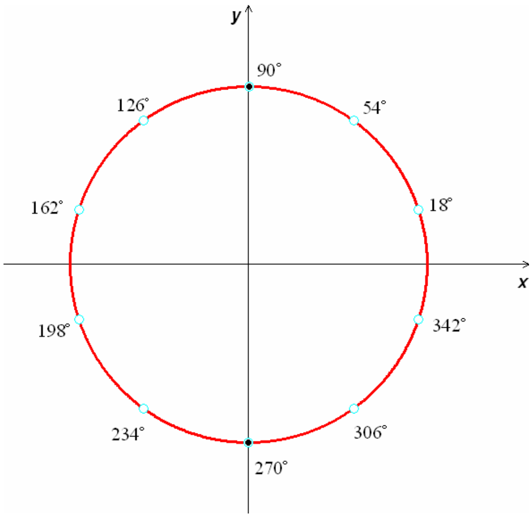
Решение. Данное уравнение равносильно совокупности уравнений

$$\left[\begin{array}{l}\cos x = 0\\ \cos 5x = 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k\\ x = \dfrac{\pi}{10} + \dfrac{\pi n}{5}\end{array}\right. \quad k, n \in \mathbf{Z}$$

Рассмотрим уравнение $\dfrac{\pi}{2} + \pi k = \dfrac{\pi}{10} + \dfrac{\pi n}{5}$.

После преобразований получаем $n = 5k + 2$. Следовательно, вторая серия решений включает в себя первую серию решений.

Отбор корней удобно проводить на тригонометрической окружности, используя градусную меру полученных решений $x = 90° + k \cdot 180°$ или $x = 18° + n \cdot 36°$.



Ответ: $\frac{\pi}{10}+\frac{\pi n}{5},\ n\in\mathbf{Z}$.

Пример 2. Решить уравнение:

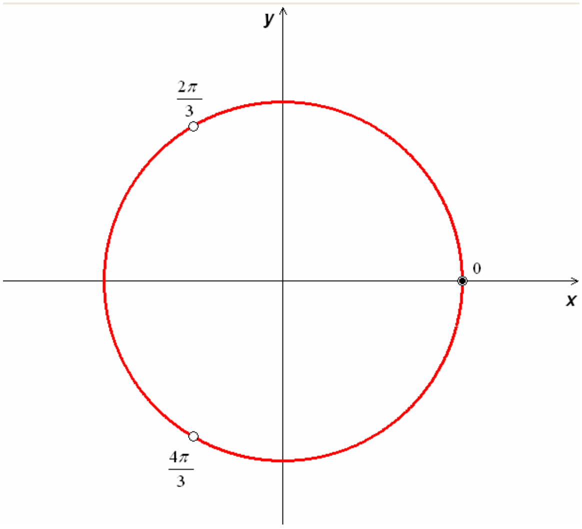
$$\cos x+\cos 3x=2.$$

Решение. Из неравенств $|\cos x|\le 1$ и $|\cos 3x|\le 1$ следует, что равенство возможно только в том случае, когда оба слагаемых одновременно будут равны 1.

$$\cos x+\cos 3x=2 \iff \begin{cases}\cos x=1,\\ \cos 3x=1.\end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases}x=2\pi n,\\ x=\frac{2\pi k}{3},\end{cases}\quad n,\ k\in\mathbf{Z}.$$

Вторая серия решений включает первую серию, поэтому имеем решение системы $x=2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$.



Ответ: $2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$.

Пример 3. Решить уравнение:

$$\sin 7x\cdot\cos 4x=-1.$$

Решение. Воспользовавшись формулой преобразования произведения синуса и косинуса в сумму, приводим уравнение к виду $\sin 11x+\sin 3x=-2$, откуда получим $\sin 11x=-2-\sin 3x$. Так как при любом значении x $\sin 11x\ge -1$, а $-2-\sin 3x\le -1$, то равенство $\sin 11x=-2-\sin 3x$ может выполняться в том и только в том случае, когда

$$\begin{cases}\sin 11x=-1,\\ -2-\sin 3x=-1\end{cases} \iff$$

$$\begin{cases}x=-\frac{\pi}{22}+\frac{2\pi n}{11},\ n\in\mathbf{Z},\\ x=-\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi m}{3},\ m\in\mathbf{Z}.\end{cases}$$

Найдем такие целые значения n и m, при которых решения в полученных сериях совпадают $-\frac{\pi}{22}+\frac{2\pi n}{11}=-\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi m}{3}$, т.е. $3n=-2+11m$. Выражая из последнего равенства n, получаем $n=3m+\frac{2m-2}{3}$. Так как n – целое, то последнее равенство возможно, только если $2m-2$ делится на 3, т.е. $2m-2=3k,\ k\in\mathbf{Z}$. Отсюда $m=1+k+\frac{k}{2}$. Поскольку m должно быть целым, то k должно быть четным. Если $k=2p$, где $p\in\mathbf{Z}$, то $m=1+2p+\frac{2p}{2}=3p+1$. Следовательно, $x=-\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi(3p+1)}{3}=\frac{\pi}{2}+2\pi p$.

Ответ: $\frac{\pi}{2}+2\pi p,\ p\in\mathbf{Z}$.

3. Отбор корней уравнения, удовлетворяющих дополнительным условиям

а) корни уравнения принадлежат промежутку

Пример 4. Найдите все решения уравнения $\sin 2x=\cos x$, принадлежащие промежутку $\left[-\pi;\frac{3\pi}{4}\right]$.

Решение. Приведем уравнение к виду $\cos x(2\sin x - 1) = 0$. Отсюда получаем два уравнения $\cos x = 0$ или $\sin x = \frac{1}{2}$.

1) $\cos x = 0$, $x = \frac{\pi}{2} + \pi n;\ n \in \mathbf{Z}$.

Если $n = 0$, то $x = \frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2} \in \left[-\pi; \frac{3\pi}{4}\right]$.

Если $n = 1$, то $x = \frac{3\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2} \notin \left[-\pi; \frac{3\pi}{4}\right]$.

Если $n = -1$, то $x = -\frac{\pi}{2},\ -\frac{\pi}{2} \in \left[-\pi; \frac{3\pi}{4}\right]$.

Если $n = -2$, то

$$x = -\frac{3\pi}{2},\ -\frac{3\pi}{2} \notin \left[-\pi; \frac{3\pi}{4}\right].$$

2) $\sin x = \frac{1}{2}$,

$$x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n \text{ или } x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}.$$

Если $n = 0$, то $x = \frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{6} \in \left[-\pi; \frac{3\pi}{4}\right]$ или $x = \frac{5\pi}{6},\ \frac{5\pi}{6} \notin \left[-\pi; \frac{3\pi}{4}\right]$.

Если $n = 1$, то для первой серии решений

$$x = \frac{13\pi}{6},\ \frac{13\pi}{6} \notin \left[-\pi; \frac{3\pi}{4}\right].$$

Если $n = -1$, то

$$x = -\frac{11\pi}{6},\ -\frac{11\pi}{6} \notin \left[-\pi; \frac{3\pi}{4}\right] \text{ или}$$

$$x = -\frac{7\pi}{6},\ -\frac{7\pi}{6} \notin \left[-\pi; \frac{3\pi}{4}\right].$$

Замечание. Другой вариант отбора корней можно провести на тригонометрическом круге, учитывая, что общий наименьший положительный период функций $\sin x$ и $\cos x$, входящих в уравнение, равен 2π.

Ответ: $-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{6}$.

Пример 5. Найдите все решения уравнения $\sin^2 2x + \sin^2 3x = 1$, принадлежащие отрезку $[1; 2]$.

Решение. Воспользуемся формулами понижения степени и преобразования суммы функций в произведение

$$\sin^2 2x + \sin^2 3x = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1 - \cos 4x}{2} + \frac{1 - \cos 6x}{2} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos 4x + \cos 6x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\cos 5x \cos x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 5x = 0 \\ \cos x = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi k}{5} \\ x = \frac{\pi}{2} + \pi k \end{array}\right. k \in \mathbf{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi k}{5},\ k \in \mathbf{Z} \text{ (см. Пример 1).}$$

Решим двойное неравенство

$$1 \le \frac{\pi}{10} + \frac{\pi k}{5} \le 2 \Leftrightarrow 10 \le \pi + 2\pi k \le 20 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 10 - \pi \le 2\pi k \le 20 - \pi \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{10 - \pi}{2\pi} \le k \le \frac{20 - \pi}{2\pi} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{\pi} - \frac{1}{2} \le k \le \frac{10}{\pi} - \frac{1}{2}.$$

Так как $\frac{5}{\pi} - \frac{1}{2} \ge \frac{5}{3{,}2} - \frac{1}{2} = \frac{17}{16}$,

$\frac{10}{\pi} - \frac{1}{2} \le \frac{10}{3} - \frac{1}{2} = \frac{17}{6}$ и $k \in \mathbf{Z}$, то $k = 2$.

Тогда $x = \frac{\pi}{10} + \frac{2\pi}{5} = \frac{\pi}{2}$.

Ответ: $\frac{\pi}{2}$.

Пример 6. Укажите количество корней уравнения

$$\mathrm{ctg} 3x \cdot \sin 6x - \cos 6x - \cos 12x = 0$$

на промежутке $[0; 2\pi]$.

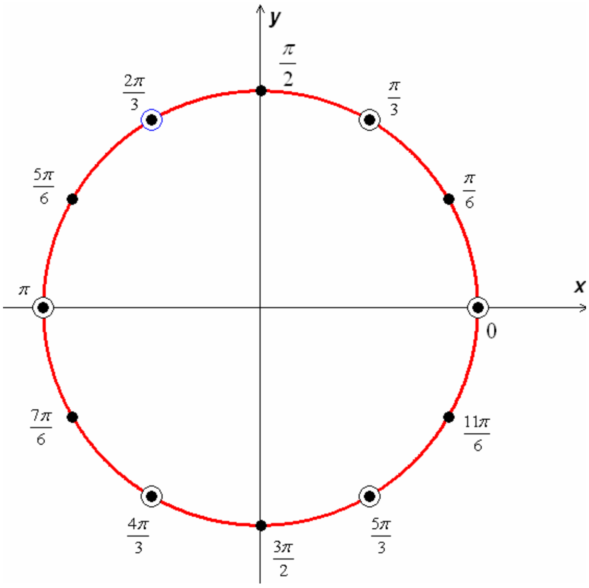
Решение. Умножая обе части уравнения на $\sin 3x \ne 0$, получаем

$$\sin 3x - \sin 3x \cdot \cos 12x = 0,$$

$\sin 3x(1 - \cos 12x) = 0.$ Отсюда имеем

$$\begin{cases} \cos 12x = 1, \\ \sin 3x \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi n}{6}, \\ x \ne \frac{\pi k}{3} \end{cases} n, k \in \mathbf{Z}$$

Проведем отбор корней, используя тригонометрическую окружность. Для этого полученные значения в серии решений и серии ограничений изобразим на тригонометрической окружности и в ответ запишем количество не совпавших в обеих сериях значений переменной x.



Ответ: 6.

б) корни уравнения удовлетворяют неравенству

Пример 7. Найдите все корни уравнения:

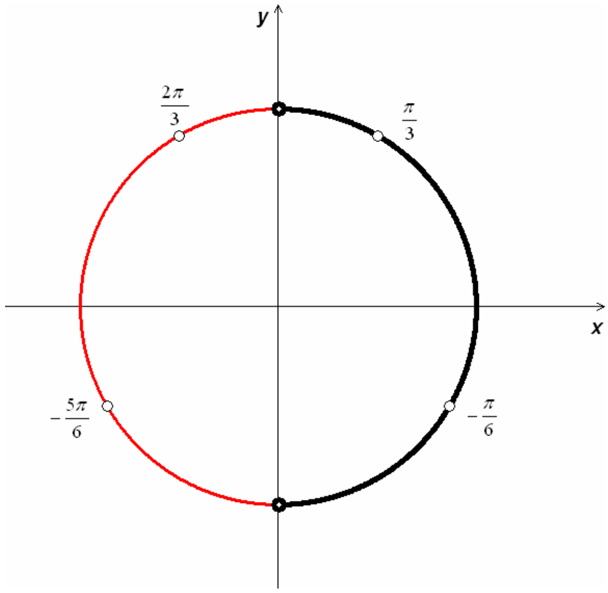
$$(2\sin x+1)(2\sin x-\sqrt{3})=0,$$

удовлетворяющие неравенству $\cos x>0$.

Решение. Данное уравнение равносильно совокупности уравнений

$$\left[\begin{array}{l} \sin x=-\dfrac{1}{2} \\ \sin x=\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{\pi}{6}+2\pi n \\ x=-\dfrac{5\pi}{6}+2\pi n \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{3}+2\pi k \\ x=\dfrac{2\pi}{3}+2\pi k \end{array}\right. \end{array}\right. \quad n,k\in \mathbf{Z}.$$

Изобразим полученные решения на тригонометрической окружности. Каждому уравнению соответствуют две точки на тригонометрической окружности. В ответ запишем только решения, расположенные на дуге окружности, соответствующей неравенству $\cos x>0$, т.е. лежащие в I и IV четвертях.



Следовательно, данному условию удовлетворяют решения $\dfrac{\pi}{3}+2\pi k$ или $-\dfrac{\pi}{6}+2\pi n$, $n,k\in \mathbf{Z}$.

Ответ: $\dfrac{\pi}{3}+2\pi k$; $-\dfrac{\pi}{6}+2\pi n$, $n,k\in \mathbf{Z}$.

4. Отбор корней уравнения, связанный с методом замены

Пример 8. Решить уравнение:

$$2\sin^4 x-\sin^2 x-1=0.$$

Решение. Обозначим $\sin^2 x=t$, где $0\le t\le 1$. Тогда получим квадратное уравнение $2t^2-t-1=0$, имеющее корни $t_1=1$ и $t_2=-\dfrac{1}{2}$ (не удовлетворяет условию $0\le t\le 1$). Для уравнения $\sin^2 x=1$ имеем

$$\frac{1-\cos 2x}{2}=1;\quad \cos 2x=-1;\quad 2x=\pi+2\pi n,$$

$$x=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in \mathbf{Z}.$$

Ответ: $\dfrac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in \mathbf{Z}$.

Пример 9. Решите уравнение:

$$\arccos^2 x-8\arccos x+15=0.$$

Решение. Положим $\arccos x=t$. Так как множество значений функции $\arccos x$ – отрезок $[0;\pi]$, найдем решения уравнения

$t^2 - 8t + 15 = 0$, удовлетворяющие условию $0 \le t \le \pi$. Такой корень один: $t = 3$. Если $t = 3$, то $\arccos x = 3$, откуда $x = \cos 3$.

Ответ: $\cos 3$.

5. Уравнения, содержащие дробные выражения

Пример 10. Решить уравнение:

$$\frac{\cos x}{1 - \sin x} = 1 + \sin x.$$

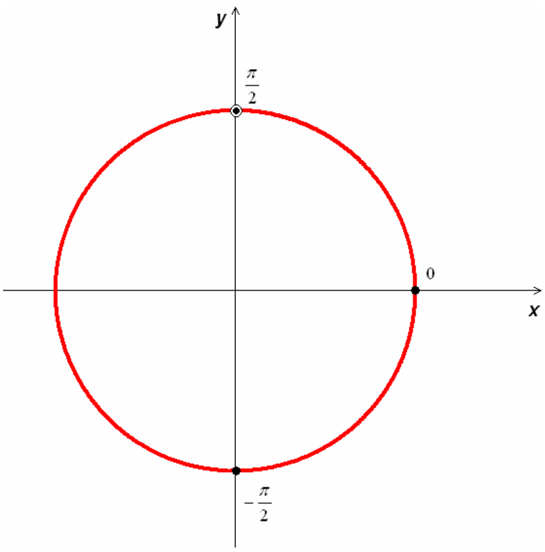
Решение. Данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} \cos x = (1 + \sin x)(1 - \sin x) \\ 1 - \sin x \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x - \cos^2 x = 0 \\ \sin x \ne 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \\ \cos x = 1 \end{array} \right. \\ \sin x \ne 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n \\ x = 2\pi k \end{array} \right. \quad n, k, m \in \mathbf{Z} \\ x \ne \dfrac{\pi}{2} + 2\pi m \end{cases}$$

Для отбора корней используем тригонометрический круг.



Ответ: $-\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n; 2\pi k;\ n, k \in \mathbf{Z}$.

Пример 11. Решить уравнение:

$$\frac{\cos 2x - \cos x + 1}{\mathrm{tg} x - 1} = 0.$$

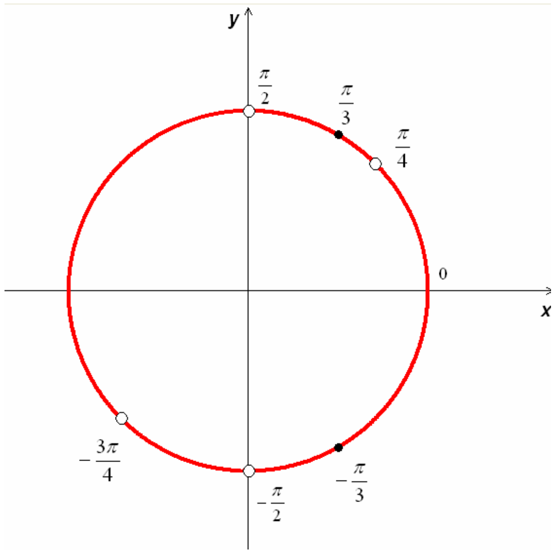
Решение. Данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} \cos 2x - \cos x + 1 = 0 \\ \cos x \ne 0 \\ \mathrm{tg} x - 1 \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x (2\cos x - 1) = 0 \\ \cos x \ne 0 \\ \mathrm{tg} x \ne 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = \dfrac{1}{2} \\ \cos x \ne 0 \\ \mathrm{tg} x \ne 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi k \\ x \ne \dfrac{\pi}{2} + \pi n \\ x \ne \dfrac{\pi}{4} + \pi m \end{cases}$$

$$k, m, n \in \mathbf{Z}.$$



Ответ: $\pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbf{Z}$.

Пример 12. Решите уравнение:

$$\frac{1}{\sin^2 x} = \frac{1}{\mathrm{tg} x} + 1.$$

Решение. Уравнение определено при условиях $\sin x \ne 0$ и $\cos x \ne 0$. Используя тригонометрические формулы, получим $\mathrm{ctg}^2 x - \mathrm{ctg} x = 0$. Отсюда $\mathrm{ctg} x = 0$ или $\mathrm{ctg} x = 1$. Корни первого уравнения $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}$ не удовлетворяют неравенству $\cos x \ne 0$. Решения второго уравнения $x = \dfrac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in \mathbf{Z}$ удовлетворяют условиям $\sin x \ne 0$ и $\cos x \ne 0$. Действительно, так как число 2π является общим наименьшим положительным периодом функций $\mathrm{ctg}x$, $\sin x$ и $\cos x$, то достаточно рассмотреть точки на тригонометрическом круге (сделайте рисунок), соответствующие условиям $\mathrm{ctg}x = 1$, $\sin x \neq 0$ и $\cos x \neq 0$.

Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in \mathbf{Z}$.

Замечание. Замена выражения $\frac{1}{\sin^2 x}$ на выражение $1 + \mathrm{ctg}^2 x$ является тождественным преобразованием при условии $\sin x \neq 0$, а замена $\frac{1}{\mathrm{tg}x}$ на $\mathrm{ctg}x$ может привести к появлению посторонних корней $x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}$.

Пример 13. Решите уравнение:

$$\frac{\cos x + \sin 2x}{\cos 3x} = 1.$$

Решение. Общий наименьший положительный период функций $\cos x$, $\cos 3x$, $\sin 2x$ равен 2π. Поэтому достаточно рассмотреть решения уравнения на промежутке $[0; 2\pi)$.

Умножим обе части уравнения на $\cos 3x \neq 0$. Далее получаем

$$\cos x + \sin 2x = \cos 3x \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \cos 3x - \cos x - \sin 2x = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -2\sin 2x \sin x - \sin 2x = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \sin 2x(2\sin x + 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin 2x = 0, \\ \sin x = -\frac{1}{2}. \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi k}{2}, \\ x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi l, \quad k, l, m \in \mathbf{Z}. \\ x = \frac{7\pi}{6} + 2\pi m, \end{array}\right.$$

На промежутке $[0; 2\pi)$ содержатся корни $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$. Из условия $\cos 3x \neq 0$ получаем $x \neq \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3},\ n \in \mathbf{Z}$, а на промежутке $[0; 2\pi)$ $x \neq \frac{\pi}{6}$, $x \neq \frac{\pi}{2}$, $x \neq \frac{5\pi}{6}$, $x \neq \frac{7\pi}{6}$, $x \neq \frac{3\pi}{2}$, $x \neq \frac{11\pi}{6}$. Таким образом, остались числа 0 и π, а значит, исходное уравнение имеет множество корней $x = \pi t, t \in \mathbf{Z}$.

Ответ: $\pi t,\ t \in \mathbf{Z}$.

Пример 14. Решите уравнение:

$$6\sin x \cos x + \sin 2x \sin \frac{2}{x} = 0.$$

Решение. Воспользуемся формулой синуса двойного аргумента

$$3\sin 2x + \sin 2x \sin \frac{2}{x} = 0,$$
$$\sin 2x\left(3 + \sin \frac{2}{x}\right) = 0.$$

Так как $3 + \sin \frac{2}{x} > 0$, то последнее уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} \sin 2x = 0 \\ x \neq 0, \end{cases} \Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi k}{2},\ k \in \mathbf{Z},\ k \neq 0.$$

Ответ: $\frac{\pi k}{2},\ k \in \mathbf{Z},\ k \neq 0$.

6. Уравнения, содержащие иррациональные выражения

Пример 15. Решить уравнение:

$$\sqrt{5\cos x - \cos 2x} + 2\sin x = 0.$$

Решение. Перепишем уравнение в виде

$$\sqrt{5\cos x - \cos 2x} = -2\sin x.$$

Последнее уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 5\cos x - \cos 2x = 4\sin^2 x \\ \sin x \leq 0 \end{cases}$$

Решим уравнение системы

$$5\cos x - (2\cos^2 x - 1) = 4(1 - \cos^2 x);$$
$$2\cos^2 x + 5\cos x - 3 = 0.$$

Отсюда $\cos x = \frac{1}{2}$ или $\cos x = -3$ (нет корней). Из уравнения $\cos x = \frac{1}{2}$ получаем

$x=\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$ или $x=-\frac{\pi}{3}+2\pi n,$ $n\in\mathbf{Z}$.

Проверим для полученных значений x выполнение условие $\sin x\le 0$:

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}+2\pi n\right)=\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}>0;$$

$$\sin\left(-\frac{\pi}{3}+2\pi n\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2},\ -\frac{\sqrt{3}}{2}<0.$$

Ответ: $-\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$.

Пример 16. Решить уравнение:

$$\sqrt{1+\frac{1}{\sin x}}=\operatorname{ctg} x.$$

Решение. Данное уравнение равносильно смешанной системе

$$\begin{cases}\operatorname{ctg} x\ge 0,\\ 1+\dfrac{1}{\sin x}=\operatorname{ctg}^2 x.\end{cases}$$

Вначале решим уравнение:

$$1+\frac{1}{\sin x}=\operatorname{ctg}^2 x;$$

$$1+\frac{1}{\sin x}=\frac{1}{\sin^2 x}-1;$$

$$1+\frac{1}{\sin x}=\left(\frac{1}{\sin x}-1\right)\left(\frac{1}{\sin x}+1\right);$$

$$\left(1+\frac{1}{\sin x}\right)\left(2-\frac{1}{\sin x}\right)=0\ .$$

В области определения, которое задается условием $\sin x\ne 0$, последнее уравнение распадается на два, равносильных ему в совокупности уравнения:

1) $1+\frac{1}{\sin x}=0$; $\sin x=-1$;

$$x=-\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}.$$

2) $2-\frac{1}{\sin x}=0$; $\sin x=\frac{1}{2}$;

$$x=(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}.$$

Отберем значения x, удовлетворяющие условию $\operatorname{ctg} x\ge 0$.

Для корней первой серии $\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)=0$, следовательно, условие $\operatorname{ctg} x\ge 0$ выполнено для всех $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$.

Для корней второй серии

$$\operatorname{ctg}\left((-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n\right)=\operatorname{ctg}\left((-1)^n\frac{\pi}{6}\right)=$$

$$=\begin{cases}\sqrt{3}, \text{если } n \text{ четно},\\ -\sqrt{3}, \text{если } n \text{ нечетно}.\end{cases}$$

Таким образом, условие $\operatorname{ctg} x\ge 0$ выполнено только для четных значений n $(n=2m,\ m\in\mathbf{Z})$, т.е. для $x=\frac{\pi}{6}+2\pi m$.

Ответ: $-\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ \frac{\pi}{6}+2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$.

Пример 17. Решите уравнение:

$$\cos\sqrt{2-x^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Решение. Рассматривая данное уравнение как простейшее тригонометрическое уравнение, получим

$$\sqrt{2-x^2}=\pm\frac{\pi}{6}+2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}.$$

Так как $2-x^2\le 2,$ то $0\le\sqrt{2-x^2}\le\sqrt{2}$.

Из всех чисел вида $\pm\frac{\pi}{6}+2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$ отрезку $[0;\sqrt{2}]$ принадлежит только число $\frac{\pi}{6}$. Поэтому последнее уравнение равносильно уравнению

$$\sqrt{2-x^2}=\frac{\pi}{6}.$$

Возведя обе части уравнения в квадрат, получим

$$x^2=2-\frac{\pi^2}{36},\ \text{откуда}\ \ x=\pm\sqrt{2-\frac{\pi^2}{36}}.$$

Ответ: $\pm\sqrt{2-\frac{\pi^2}{36}}$.

7. Уравнения, содержащие показательные выражения

Пример 18. Решить уравнение:

$$\frac{\left(3^{\cos x}\right)^{\cos x}}{\left(\sqrt{3}\right)^{\sqrt{3}\cos x}}=\sqrt{27}\,.$$

Решение. Преобразуем данное уравнение

$$3^{\cos^2 x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x}=3^{\frac{3}{2}};$$

$$\cos^2 x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x-\frac{3}{2}=0\,.$$

Обозначив $\cos x = t,$ где $-1\le t\le 1$, получим для неизвестной t квадратное уравнение $2t^2-\sqrt{3}t-3=0$, которое имеет корни $t_1=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ и $t_2=\sqrt{3}$ (не удовлетворяет условию $-1\le t\le 1$).

Выполнив обратную замену, из уравнения $\cos x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ получаем

$$x=\pm\frac{5\pi}{6}+2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}\,.$$

***Ответ*:** $\pm\frac{5\pi}{6}+2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$.

Пример 19. Решите уравнение:

$$\cos\left(22\pi-\frac{13x}{4}\right)=3^{\sqrt{x}}\,.$$

Решение. Так как $\sqrt{x}\ge 0$, то $3^{\sqrt{x}}\ge 1$. Левая часть уравнения ограничена, так как $-1\le\cos\left(22\pi-\frac{13x}{4}\right)\le 1$. Поэтому данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases}\cos\left(22\pi-\frac{13x}{4}\right)=1\\ 3^{\sqrt{x}}=1\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\cos 22\pi=1\,(\textit{верно})\\ x=0\end{cases}$$

***Ответ*:** 0.

8. Уравнения, содержащие логарифмические выражения

Пример 20. Решите уравнение:

$$\log_2(\sin x)=\log_2(-\cos x)\,.$$

Решение. Данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases}\sin x=-\cos x,\\ \sin x>0.\end{cases}$$

Из уравнения системы получаем $\mathrm{tg}x=-1,\ x=-\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$. Неравенству $\sin x>0$ удовлетворяют числа $x=\frac{3\pi}{4}+2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$.

***Ответ*:** $x=\frac{3\pi}{4}+2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$.

Пример 21. Решите уравнение:

$$\log_2(-\sin x)+\log_2(\cos x)=-2$$

Решение. Данное уравнение равносильно смешанной системе:

$$\begin{cases}-\sin x>0,\\ \cos x>0,\\ \log_2(-\sin x\cos x)=-2\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\sin x<0,\\ \cos x>0,\\ -\sin x\cos x=0{,}25.\end{cases}$$

Решим вначале уравнение этой системы:

$$-\sin x\cos x=0{,}25\ \Leftrightarrow\ \sin 2x=-0{,}5\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x=-\frac{\pi}{6}+2\pi n,\ n\in\mathbf{Z},\\ 2x=-\frac{5\pi}{6}+2\pi k,\ k\in\mathbf{Z},\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\frac{\pi}{12}+\pi n,\ n\in\mathbf{Z},\\ x=-\frac{5\pi}{12}+\pi k,\ k\in\mathbf{Z}.\end{array}\right.$$

Условиям $\sin x<0$ и $\cos x>0$ удовлетворяет совокупность значений x, принадлежащих четвертой координатной четверти. Тогда решения исходного уравнения можно записать следующим образом:

$$\left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{\pi}{12}+2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}, \\ x=-\dfrac{5\pi}{12}+2\pi k,\ k\in\mathbf{Z}. \end{array}\right.$$

Ответ: $-\dfrac{\pi}{12}+2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$; $-\dfrac{5\pi}{12}+2\pi k,\ k\in\mathbf{Z}$.

9. Уравнения, содержащие модули

Пример 22. Решить уравнение:

$$|\cos x|=\sqrt{3}\sin x.$$

Решение. Из данного уравнения получаем равносильную систему

$$\left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l}\cos x=\sqrt{3}\sin x\\ \cos x=-\sqrt{3}\sin x\end{array}\right. \\ \sin x\ge 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \mathrm{tg}x=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}\quad n\in\mathbf{Z} \\ \sin x\ge 0\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=\pm\dfrac{\pi}{6}+\pi n\quad n\in\mathbf{Z}. \\ \sin x\ge 0\end{array}\right.$$

Так как функции $\mathrm{tg}x$ и $\sin x$ имеют общий наименьший положительный период 2π, то отбор корней проведем на тригонометрическом круге (сделайте рисунок).

Ответ: $\dfrac{\pi}{6}+2\pi k; \dfrac{5\pi}{6}+2\pi n; k,n\in\mathbf{Z}.$

Пример 23. Решите уравнение:

$$|\cos x|=\cos x+2\sin x.$$

Решение. Рассмотрим две области на числовой прямой, на которых $\cos x\ge 0$ и $\cos x<0$.

1) Пусть $\cos x\ge 0$, тогда данное уравнение принимает вид:

$$\cos x=\cos x+2\sin x \Leftrightarrow \sin x=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x=\pi n,\ n\in\mathbf{Z}.$$

Условию $\cos x\ge 0$ удовлетворяют только значения $x=2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}.$

2) Для условия $\cos x<0$ исходное уравнение перепишем так:

$$-\cos x=\cos x+2\sin x \Leftrightarrow \sin x+\cos x=0$$
$$\Leftrightarrow \mathrm{tg}x=-1 \Leftrightarrow x=-\dfrac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in\mathbf{Z}.$$

Условию $\cos x<0$ удовлетворяют только значения $x=\dfrac{3\pi}{4}+2\pi k,\ k\in\mathbf{Z}.$

Ответ: $2\pi n,\ n\in\mathbf{Z};\ \dfrac{3\pi}{4}+2\pi k,\ k\in\mathbf{Z}.$

Пример 24. Решите уравнение:

$$7|\cos x|-4\cos x=3|\sin x|+2\sin x.$$

Решение. Рассмотрим значения синуса и косинуса по четвертям координатной окружности.

Первая четверть:

$$3\cos x=5\sin x \Leftrightarrow \mathrm{tg}x=\dfrac{3}{5} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x=\mathrm{arctg}\dfrac{3}{5}+2\pi k,\ k\in\mathbf{Z}.$$

Вторая четверть:

$$-11\cos x=5\sin x \Leftrightarrow \mathrm{tg}x=-\dfrac{11}{5} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x=\pi-\mathrm{arctg}\dfrac{11}{5}+2\pi l,\ l\in\mathbf{Z}.$$

Третья четверть:

$$-11\cos x=-\sin x \Leftrightarrow \mathrm{tg}x=11 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x=\pi+\mathrm{arctg}11+2\pi m,\ m\in\mathbf{Z}.$$

Четвертая четверть:

$$3\cos x=-\sin x \Leftrightarrow \mathrm{tg}x=-3 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x=-\mathrm{arctg}3+2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}.$$

Ответ: $\mathrm{arctg}\dfrac{3}{5}+2\pi k,\ \ \pi-\mathrm{arctg}\dfrac{11}{5}+2\pi l,$ $\pi+\mathrm{arctg}11+2\pi m,\ \ -\mathrm{arctg}3+2\pi n,$ где $k,l,m,\ n\in\mathbf{Z}.$

Пример 25. Решите уравнение:

$$\sqrt{(3\sin 0{,}25x-4)^2}-\sqrt{\sin^2 0{,}25x-6\sin 0{,}25x+9}=1-\sqrt{2}.$$

Решение. Имеем

$$|4-3\sin 0{,}25x|-|3-\sin 0{,}25x|=1-\sqrt{2}.$$

Так как при всех $x\in\mathbf{R}$

$$4-3\sin 0{,}25x>0,\ \ 3-\sin 0{,}25x>0,$$

то получаем

$$1-2\sin 0{,}25x=1-\sqrt{2};\ \ \sin 0{,}25x=\dfrac{\sqrt{2}}{2};$$

$$x=(-1)^n\pi+4\pi n,\ n\in\mathbf{Z}.$$

Ответ: $(-1)^n\pi+4\pi n,\ n\in\mathbf{Z}.$

10. Уравнения, содержащие обратные тригонометрические функции

Пример 26. Решите уравнение:

$$\arccos(x^2-3)=\arccos(x+3).$$

Решение. Уравнение равносильно системе

$$\begin{cases}x^2-3=x+3,\\-1\le x+3\le 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-x-6=0,\\-4\le x\le -2\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=-2\\x=3\end{array}\right.\\-4\le x\le -2\end{cases}\Leftrightarrow\ x=-2.$$

Ответ: -2.

Пример 27. Решите уравнение:

$$\arccos x=\arcsin 2x.$$

Решение. Область допустимых значений уравнения определяется условиями $|x|\le 1$, $|2x|\le 1$, т.е. $|x|\le 0{,}5$. Более того, поскольку значения арккосинуса ограничены отрезком $[0,\pi]$, а арксинуса – отрезком $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, то равенство левой и правой частей уравнения возможно только в случае, если их значения лежат на отрезке $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, т.е. с учетом области допустимых значений переменной x имеем $0\le x\le 0{,}5$.

Таким образом, решение уравнения следует искать на множестве $0\le x\le 0{,}5$. Так как функция $y=\cos t$ убывает на отрезке $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, то на отрезке $[0;0{,}5]$ уравнение $\arccos x=\arcsin 2x$ равносильно уравнению $\cos(\arccos x)=\cos(\arcsin 2x)$, которое, в свою очередь, на $[0;0{,}5]$ равносильно уравнениям: $x=\sqrt{1-4x^2}$, $x^2=1-4x^2$, $5x^2=1$, $x=\frac{1}{\sqrt5}$ (при $0\le x\le 0{,}5$).

Ответ: $\frac{1}{\sqrt5}$.

Пример 28. Решите уравнение:

$$\arccos\frac{3x+4}{1-2x}=\pi x+6\pi.$$

Решение. В соответствии с определением арккосинуса запишем ограничения, которым должна удовлетворять переменная x. Область допустимых значений уравнения определяется условиями $-1\le\frac{3x+4}{1-2x}\le 1$, а поскольку значения арккосинуса ограничены отрезком $[0,\pi]$, то для выполнения равенства необходимо выполнение условия $0\le\pi x+6\pi\le\pi$. Получаем систему неравенств

$$\begin{cases}-1\le\dfrac{3x+4}{1-2x}\le 1,\\0\le\pi x+6\pi\le\pi\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{3x+4}{1-2x}\ge -1,\\\dfrac{3x+4}{1-2x}\le 1,\\0\le x+6\le 1\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{x+5}{1-2x}\ge 0,\\\dfrac{5x+3}{1-2x}\le 0,\\-6\le x\le -5\end{cases}\Leftrightarrow\quad x=-5.$$

Подставляя полученное единственное значение $x=-5$ в исходное уравнение, получим

$$\arccos\frac{3\cdot(-5)+4}{1-2\cdot(-5)}=\pi\cdot(-5)+6\pi,$$

$\arccos\frac{-11}{11}=\pi$ или $\arccos(-1)=\pi-$ верно.

Следовательно, данное уравнение имеет единственное решение $x=-5$.

Ответ: -5.

11. Комбинированные уравнения

Пример 29. Решите уравнение:

$$\frac{(2\cos x+1)\log_{13}(3\mathrm{tg}^2x)}{\log_{31}(2\sin x)}=0.$$

Решение. Из данного уравнения получаем два уравнения $\cos x=-0{,}5$ или $\mathrm{tg}x=\pm\frac{\sqrt3}{3}$ при условии

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x \neq 0 \\ \sin x > 0 \\ \sin x \neq 0{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x > 0 \\ \sin x \neq 0{,}5 \end{cases}$$

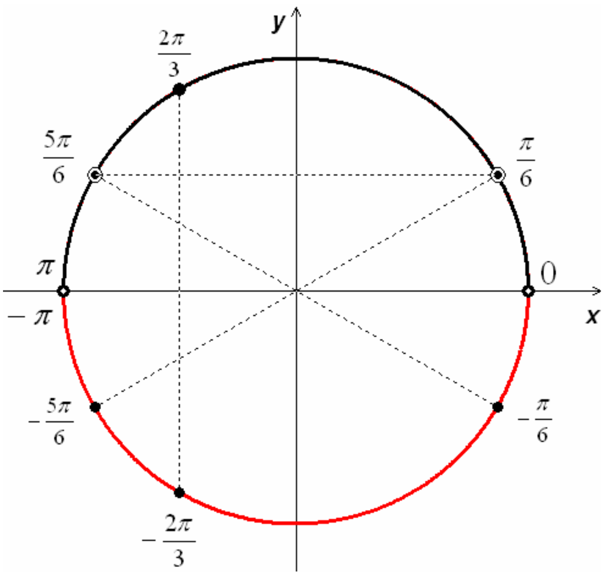
Получаем

$$\left[\begin{aligned} x &= \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n \\ x &= \pm\frac{\pi}{6} + \pi k \end{aligned}\right. \quad n,k \in \mathbf{Z}$$

с ограничениями

$$\begin{cases} \sin x > 0 \\ x \neq (-1)^n \dfrac{\pi}{6} + \pi m \end{cases} \quad m \in \mathbf{Z}.$$

Так как тригонометрические функции ($\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$), входящие в данное уравнение, имеют общий наименьший положительный период 2π, то изобразим множество решений на числовой окружности, выделив промежуток $[-\pi;\pi)$.



Ответ: $\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi n, \ n \in \mathbf{Z}.$

Пример 30. Решите уравнение:

$$\frac{2\sin^2 x + 2\cos^2\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) - 1}{\sqrt{6x - x^2}} = 0.$$

Решение. Данное уравнение равносильно смешанной системе

$$\begin{cases} 2\sin^2 x + 2\cos^2\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) - 1 = 0, \\ 6x - x^2 > 0. \end{cases}$$

Решим вначале уравнение этой системы.

$$2\sin^2 x + 2\cos^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\sin^2 x + 1 + \cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\sin^2 x - \sin 2x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\sin^2 x - 2\sin x \cos x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin x \cdot (\sin x - \cos x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &\sin x = 0, \\ &\sin x - \cos x = 0; \end{aligned}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &\sin x = 0, \\ &\operatorname{tg} x = 1; \end{aligned}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &x = \pi n, && n \in \mathbf{Z}, \\ &x = \frac{\pi}{4} + \pi k, && k \in \mathbf{Z}. \end{aligned}\right.$$

Перейдем к решению неравенства:

$$6x - x^2 > 0 \Leftrightarrow x \cdot (6 - x) > 0 \Leftrightarrow 0 < x < 6.$$

Среди решений уравнения отберем те, которые принадлежат интервалу $(0;6)$.

Рассмотрим первую серию решений.

$$0 < \pi n < 6, \ n \in \mathbf{Z} \Leftrightarrow 0 < n < \frac{6}{\pi}, \ n \in \mathbf{Z} \Leftrightarrow$$

$n = 1$. Следовательно, интервалу $(0;6)$ принадлежит $x = \pi$.

Рассмотрим вторую серию решений.

$$0 < \frac{\pi}{4} + \pi k < 6, \ k \in \mathbf{Z} \Leftrightarrow$$

$$-\frac{1}{4} < k < \frac{6}{\pi} - \frac{1}{4}, \ k \in \mathbf{Z}.$$

Поскольку $1{,}25 = \dfrac{6}{4} - \dfrac{1}{4} < \dfrac{6}{\pi} - \dfrac{1}{4} < \dfrac{6}{3} - \dfrac{1}{4} = 1{,}75$, то условиям $-\dfrac{1}{4} < k < \dfrac{6}{\pi} - \dfrac{1}{4}$, $k \in \mathbf{Z}$ удовлетворяют два значения: $k = 0$ и $k = 1$. Значит, интервалу $(0;6)$ принадлежат два решения из второй серии: $x_1 = \dfrac{\pi}{4}$ и $x_2 = \dfrac{5\pi}{4}$.

Ответ: $\dfrac{\pi}{4}, \ \pi, \ \dfrac{5\pi}{4}$.

12. Упражнения

1. Решите уравнение:

$$2\sin^2\frac{x}{2}+19\sin\frac{x}{2}-10=0.$$

Ответ: $(-1)^n\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}.$

2. Решите уравнение:

$$2\cos^2 x+5\sin x+1=0.$$

Ответ: $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}.$

3. Найти сумму корней уравнения $(\mathrm{tg}x+1)(\sin x-1)=0$, принадлежащие промежутку $[-50°;\ 350°]$.

Ответ: 405°.

4. Найти сумму корней уравнения $(\mathrm{ctg}x+\sqrt{3})\sin 2x=0$, принадлежащие промежутку $[-100°;\ 300°]$.

Ответ: 390°.

5. Найдите те решения уравнения $\sin x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, для которых $\cos x>0$.

Ответ: $-\frac{\pi}{4}+2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}.$

6. Найдите те решения уравнения $\cos x=-\frac{1}{2}$, для которых $\sin x>0$.

Ответ: $\frac{2\pi}{3}+2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}.$

7. Найдите все корни уравнения $(\sqrt{2}\sin x+1)(2\sin x-3)=0$, удовлетворяющие неравенству $\mathrm{tg}x<0$.

Ответ: $-\frac{\pi}{4}+2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}.$

8. Найдите все корни уравнения $(\sqrt{2}\cos x-1)(2\cos x+1)=0$, удовлетворяющие неравенству $\sin x<0$.

Ответ: $-\frac{\pi}{4}+2\pi n;\ -\frac{2\pi}{3}+2\pi k;\ k,n\in\mathbf{Z}.$

9. Найдите все корни уравнения $(2\cos x+\sqrt{3})(3\cos x+4)=0$, удовлетворяющие неравенству $\mathrm{tg}x>0$.

Ответ: $-\frac{5\pi}{6}+2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}.$

10. Найдите все корни уравнения $(\mathrm{tg}x+\sqrt{3})(2\cos x-1)=0$, удовлетворяющие неравенству $\sin x>0$.

Ответ: $\frac{\pi}{3}+2\pi n;\ \frac{2\pi}{3}+2\pi k;\ k,n\in\mathbf{Z}.$

11. Найдите все корни уравнения $(\mathrm{tg}x-1)(\sqrt{2}\sin x+1)=0$, удовлетворяющие неравенству $\cos x<0$.

Ответ: $\frac{5\pi}{4}+2\pi k;\ k\in\mathbf{Z}.$

12. Найдите все корни уравнения $3\mathrm{tg}^2x=1$, удовлетворяющие неравенству $\sin x<0$.

Ответ: $-\frac{\pi}{6}+2\pi n;\ \frac{7\pi}{6}+2\pi k;\ k,n\in\mathbf{Z}.$

13. Найдите все корни уравнения $\sqrt{2}\sin^2 x=\sin x$, удовлетворяющие неравенству $\cos x<0$.

Ответ: $\pi+2\pi n;\ \frac{3\pi}{4}+2\pi k;\ k,n\in\mathbf{Z}.$

14. Найдите все корни уравнения $2\cos^2 x+\sqrt{3}\cos x=0$, удовлетворяющие неравенству $\sin x<0$.

Ответ: $-\frac{\pi}{2}+2\pi n;\ -\frac{5\pi}{6}+2\pi k;\ k,n\in\mathbf{Z}.$

15. Найдите все корни уравнения $\mathrm{tg}^2x=\sqrt{3}\,\mathrm{tg}x$, удовлетворяющие неравенству $\cos x<0$.

Ответ: $\pi+2\pi n;\ \frac{4\pi}{3}+2\pi k;\ k,n\in\mathbf{Z}.$

16. Найдите наименьший по модулю корень уравнения $7\cos 3x-3\cos x=0$.

Ответ: $\pm\arccos\sqrt{\frac{6}{7}}.$

17. Найдите наименьший по модулю корень уравнения $5\sin 3x+2\sin x=0$.

Ответ: 0.

18. Решите уравнение: $\mathrm{ctg}x-\cos x=0$.

Ответ: $\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}.$

19. Решите уравнение: $\mathrm{tg}x+\sin x=0$.

Ответ: $\pi n,\ n\in\mathbf{Z}.$

20. Решите уравнение: $3\mathrm{tg}x+2\mathrm{ctg}x=5$.

Ответ: $\frac{\pi}{4}+\pi n,\ \mathrm{arctg}\frac{2}{3}+\pi k,\ n,k\in\mathbf{Z}.$

21. Решите уравнение: $4\mathrm{tg}x-3\mathrm{ctg}x=1$.

Ответ: $\frac{\pi}{4}+\pi n,\ -\mathrm{arctg}\frac{3}{4}+\pi k,\ n,k\in\mathbf{Z}$.

22. Решите уравнение: $\mathrm{ctg}3x=\mathrm{ctg}x$.

Ответ: $\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$.

23. Решите уравнение:

$$\left(\mathrm{ctg}\frac{x}{2}-\sqrt{3}\right)\left(\cos\frac{x}{4}+1\right)=0.$$

Ответ: $\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$.

24. Решите уравнение:

$$\mathrm{ctg}2x\cdot\cos 5x+\sin x=0.$$

Ответ: $\pm\frac{\pi}{6}+\pi k;\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{4},\ k,n\in\mathbf{Z}$.

25. Решите уравнение:

$$\mathrm{tg}2x+\mathrm{tg}4x=\mathrm{tg}5x+\mathrm{tg}x.$$

Ответ: $\frac{\pi n}{6},n\in\mathbf{Z}$.

26. Решите уравнение: $\frac{\sin 3x}{\sin x}=0$.

Ответ: $\pm\frac{\pi}{3}+\pi n,n\in\mathbf{Z}$.

27. Решите уравнение: $\frac{2\sin x-\sqrt{3}}{2\cos x+1}=0$.

Ответ: $\frac{\pi}{3}+2\pi n,n\in\mathbf{Z}$.

28. Решите уравнение: $\frac{\sin 2x}{\mathrm{tg}x}=\cos x$.

Ответ: $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n,n\in\mathbf{Z}$.

29. Решите уравнение:

$$\frac{1-\cos x+\sin x}{\cos x}=0.$$

Ответ: $2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$.

30. Решите уравнение:

$$\frac{\sin x-\cos x}{4x-\pi}=0$$

Ответ: $\frac{\pi}{4}+\pi n,n\in\mathbf{Z},\ n\neq 0$.

31. Решите уравнение: $\frac{\sin x+\cos x}{\cos x+\cos 3x}=1$.

Ответ: $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2},\ n\in\mathbf{Z}$.

32. Решите уравнение: $\frac{4\mathrm{tg}^2x-3\mathrm{tg}x}{5\sin^2x+3\sin x}=0$.

Ответ: $\mathrm{arctg}\frac{3}{4}+2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$.

33. Решите уравнение:

$$\frac{3\mathrm{ctg}^2x+4\mathrm{ctg}x}{5\cos^2x-4\cos x}=0.$$

Ответ: $\pi-\mathrm{arcctg}\frac{4}{3}+2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$.

34. Решите уравнение: $\frac{\cos 4x}{\sin 2x}=\frac{\sin 4x}{\cos 2x}$.

Ответ: $\pm\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2},\ n\in\mathbf{Z}$.

35. Решите уравнение:

$$4\cos x\cdot\mathrm{ctg}x+4\mathrm{ctg}x+\sin x=0.$$

Ответ: $\pm\left(\pi-\arccos\frac{1}{3}\right)+2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$.

36. Решите уравнение:

$$3\sin 2x\cdot\mathrm{tg}x+4\cos^2x=7\sin x+1.$$

Ответ: $(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$.

37. Решите уравнение:

$$\frac{\cos 2x-1+\sin x}{\mathrm{ctg}x-1}=0.$$

Ответ: $(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$.

38. Решите уравнение:

$$\frac{\cos 2x+\cos x+1}{2\sin x+\sqrt{3}}=0.$$

Ответ: $\frac{\pi}{2}+\pi k;\frac{2\pi}{3}+2\pi n;\ k,n\in\mathbf{Z}$.

39. Решите уравнение:

$$\frac{\cos 2x-\sin x-1}{2\cos x-\sqrt{3}}=0.$$

Ответ: $\pi k;-\frac{5\pi}{6}+2\pi n;\ k,n\in\mathbf{Z}$.

40. Решите уравнение:

$$\frac{2-2\cos^2x-\sqrt{3}\sin x}{\mathrm{tg}x-\sqrt{3}}=0.$$

Ответ: $\pi k;\frac{2\pi}{3}+2\pi k;\ k\in\mathbf{Z}$.

41. Решите уравнение:

$$\frac{2-2\sin^2x-\sqrt{3}\cos x}{\mathrm{ctg}x-\sqrt{3}}=0.$$

Ответ: $\frac{\pi}{2}+\pi k; -\frac{\pi}{6}+2\pi n; k, n\in\mathbf{Z}$.

42. Решите уравнение:

$$\frac{\operatorname{ctg}^2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-\sqrt{3}\operatorname{tg}x}{2\cos x-1}=0.$$

Ответ: $\pi k; -\frac{2\pi}{3}+2\pi k; k\in\mathbf{Z}$.

43. Решите уравнение:

$$\frac{\sin 4x-\sin 2x-\cos 3x+2\sin x-1}{2\sin 2x-\sqrt{3}}=0.$$

Ответ: $\frac{5\pi}{6}+2\pi k; \pi+2\pi k; \frac{5\pi}{3}+2\pi k;$ $k\in\mathbf{Z}$.

44. Найдите все значения x, при каждом из которых выражения $\frac{\sin 4x}{\operatorname{tg}2x}$ и $\frac{\cos^4 x-\sin^4 x}{\operatorname{tg}2x}$ принимают равные значения.

Ответ: $(-1)^k\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2}; k\in\mathbf{Z}$.

45. Решите уравнение:

$$\sqrt{\cos 2x+\sin 3x}=\sqrt{2}\cos x.$$

Ответ: $\frac{\pi}{6}+2\pi k; \frac{3\pi}{2}+2\pi n; k, n\in\mathbf{Z}$.

46. Решите уравнение:

$$\left(\sin\frac{x}{2}+\sin x+\sin\frac{3x}{2}+\sin 2x\right)\sqrt{\cos x}=0.$$

Ответ: $\frac{\pi}{2}+\pi k,\ 2\pi m,\ \pm\frac{2\pi}{5}+2\pi(2n+1),$ $k, m, n\in\mathbf{Z}$.

47. Решите уравнение:

$$\left(\cos\frac{x}{2}+\cos x+\cos\frac{3x}{2}+\cos 2x\right)\sqrt{\sin x}=0.$$

Ответ: $\frac{2\pi}{5}+4\pi k,\ \pi m,\ \frac{4\pi}{5}+2\pi(2n+1),$ $k, m, n\in\mathbf{Z}$.

48. Решите уравнение: $\frac{\cos 2x+\cos x}{1+\sqrt{\sin x}}=0$.

Ответ: $\pi+2\pi k; \frac{\pi}{3}+2\pi n; k, n\in\mathbf{Z}$.

49. Решите уравнение:

$$\frac{\cos 2x-2+3\sin x}{1+\sqrt{\cos x}}=0$$

Ответ: $\frac{\pi}{2}+2\pi k; \frac{\pi}{6}+2\pi n; k, n\in\mathbf{Z}$.

50. Решите уравнение:

$$\frac{2\sin^2 x-\sin\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)-1}{\sqrt{\sin x}}=0$$

Ответ: $\frac{2\pi}{3}+2\pi n; n\in\mathbf{Z}$.

51. Решите уравнение:

$$\frac{6\sin^2 x-5\sin x+1}{\sqrt{-\cos x}}=0.$$

Ответ: $\frac{5\pi}{6}+2\pi n;\ \pi-\arcsin\frac{1}{3}+2\pi n;.$ $n\in\mathbf{Z}$.

52. Решите уравнение:

$$\frac{6\cos^3 x+\cos^2 x-\cos x}{\sqrt{-\operatorname{ctg}x}}=0.$$

Ответ: $\frac{2\pi}{3}+2\pi n;\ -\arccos\frac{1}{3}+2\pi n;$ $n\in\mathbf{Z}$.

53. Решите уравнение:

$$\frac{2\sin^3 x-3\sin^2 x+\sin x}{\sqrt{-\operatorname{tg}x}}=0.$$

Ответ: $\frac{5\pi}{6}+2\pi n; n\in\mathbf{Z}$.

54. Решите уравнение:

$$\frac{2\cos^3 x+3\cos^2 x+\cos x}{\sqrt{\operatorname{ctg}x}}=0.$$

Ответ: $-\frac{2\pi}{3}+2\pi n; n\in\mathbf{Z}$.

55. Решите уравнение: $\frac{\operatorname{tg}^3 x-\operatorname{tg}x}{\sqrt{-\sin x}}=0$.

Ответ: $-\frac{\pi}{4}+2\pi k,\ -\frac{3\pi}{4}+2\pi n,\quad k, n\in\mathbf{Z}$.

56. Решите уравнение: $\frac{\operatorname{ctg}^3 x-\operatorname{ctg}x}{\sqrt{\cos x}}=0$.

Ответ: $\pm\frac{\pi}{4}+2\pi k,\quad k\in\mathbf{Z}$.

57. Решите уравнение: $\dfrac{9^{\sin x}-3}{\sqrt{-2\cos x}}=0$.

Ответ: $\dfrac{5\pi}{6}+2\pi k,\ \ k\in\mathbf{Z}$.

58. Решите уравнение: $\dfrac{9^{\cos x}-3^{\sqrt{2}}}{\sqrt{-23\mathrm{tg}x}}=0$.

Ответ: $-\dfrac{\pi}{4}+2\pi k,\ \ k\in\mathbf{Z}$.

59. Решите уравнение:

$$\sin\frac{x}{3}=\left(\sqrt{25-x^2}\right)^2+x^2-25.$$

Ответ: 0.

60. Решите уравнение:

$$(\sin 2x)\cdot\sqrt{4-x^2}=0.$$

Ответ: $-2;\ 2;\ \dfrac{\pi}{2};\ -\dfrac{\pi}{2};\ 0.$

61. Решите уравнение

$$(\cos 3x-1)\cdot\sqrt{6+5x-x^2}=0.$$

Ответ: $-1;\ 6;\ 0;\ \dfrac{2\pi}{3};\ \dfrac{4\pi}{3}.$

62. Решите уравнение:

$$\sin 0{,}8x=\left(\sqrt{4-x^2}\right)^2+x^2-3.$$

Ответ: $\dfrac{5\pi}{8}$.

63. Решите уравнение:

$$\sqrt{5\cos x-\cos 2x}=-2\sin x.$$

Ответ: $-\dfrac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$.

64. Решите уравнение:

$$(2\sin x-1)(\sqrt{-\cos x}+1)=0.$$

Ответ: $\dfrac{5\pi}{6}+2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$.

65. Решите уравнение:

$$(2\cos x+1)(\sqrt{-\sin x}-1)=0.$$

Ответ: $-\dfrac{\pi}{2}+2\pi k,\ -\dfrac{2\pi}{3}+2\pi n,\ \ k,n\in\mathbf{Z}$.

66. Решите уравнение:

$$(2\cos^2 x-9\cos x+4)\sqrt{-2\mathrm{tg}x}=0.$$

Ответ: $\pi k,\ -\dfrac{\pi}{3}+2\pi n,\ \ k,n\in\mathbf{Z}$.

67. Решите уравнение:

$$(2\sin^2 x-9\sin x-5)\sqrt{11\mathrm{tg}x}=0.$$

Ответ: $\pi k,\ -\dfrac{5\pi}{6}+2\pi n,\ \ k,n\in\mathbf{Z}$.

68. Решите уравнение:

$$\sqrt{3+4\cos 2x}=\sqrt{2}\cos x.$$

Ответ: $\pm\arccos\dfrac{\sqrt{6}}{6}+2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$.

69. Решите уравнение:

$$\sqrt{5-2\sin x}=6\sin x-1.$$

Ответ: $(-1)^n\dfrac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$.

70. Решите уравнение:

$$\sin x+\cos x=\sqrt{1-2\sin^2 x}.$$

Ответ: $2\pi k;-\dfrac{\pi}{4}+\pi n;\ k,n\in\mathbf{Z}$.

71. Решите уравнение: $\sqrt{\sin x}\cdot\cos x=0$.

Ответ: $\pi k;\dfrac{\pi}{2}+2\pi n;\ k,n\in\mathbf{Z}$.

72. Решите уравнение:

$$\sqrt{\cos 2x}=-\sqrt{2}\sin x$$

Ответ: $(-1)^{n+1}\dfrac{\pi}{6}+\pi n;\ n\in\mathbf{Z}$.

73. Решите уравнение:

$$\frac{\sin 2x+2\sin^2 x}{\sqrt{-\cos x}}=0$$

Ответ: $\pi+2\pi k,\ \dfrac{3\pi}{4}+2\pi n,\ \ k,n\in\mathbf{Z}$.

74. Решите уравнение:

$$\frac{\sin 2x-2\cos^2 x}{\sqrt{\sin x}}=0$$

Ответ: $\dfrac{\pi}{2}+2\pi k,\ \dfrac{\pi}{4}+2\pi n,\ \ k,n\in\mathbf{Z}$.

75. Решите уравнение:

$$\frac{10\cos^2 x-\cos x-3}{(5\sin x-4)\sqrt{-\mathrm{tg}x}}=0$$

Ответ: $\dfrac{2\pi}{3}+2\pi k,\ -\arccos\dfrac{3}{5}+2\pi n,$
$k,n\in\mathbf{Z}$.

76. Решите уравнение:

$$\frac{2\sin^2 x-5\sin x-3}{\sqrt{x+\dfrac{\pi}{6}}}=0.$$

Ответ: $-\dfrac{\pi}{6}+2\pi k,\ -\dfrac{5\pi}{6}+2\pi k,$
$k=1,2,3,\ldots$

77. Решите уравнение:
$$\frac{2\cos^2 x+5\cos x-3}{\sqrt{x-\frac{\pi}{3}}}=0.$$
Ответ: $-\frac{\pi}{3}+2\pi k,\ \frac{\pi}{3}+2\pi k,\quad k=1,2,3,\ldots$

78. Решите уравнение:
$$\frac{-4\sin^2 x+8\cos x+7}{\sqrt{\mathrm{ctg}x}}=0.$$
Ответ: $-\frac{2\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\mathbf{Z}.$

79. Решите уравнение:
$$\frac{4\cos^2 x-8\sin x-7}{\sqrt{\mathrm{tg}x}}=0.$$
Ответ: $-\frac{5\pi}{6}+2\pi k,\quad k\in\mathbf{Z}.$

80. Решите уравнение:
$$\frac{4\cos^2 x+8\sin x-7}{\sqrt{-\mathrm{tg}x}}=0.$$
Ответ: $\frac{5\pi}{6}+2\pi k,\quad k\in\mathbf{Z}.$

81. Решите уравнение:
$$\frac{3\cos 2x+7\cos x+3}{\sqrt{-\sin x}}=0.$$
Ответ: $\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}.$

82. Решите уравнение: $\frac{4\cos x-3}{\sqrt{\mathrm{tg}x}}=0$

Ответ: $\arccos\frac{3}{4}+2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}.$

83. Решите уравнение: $\frac{6\sin x+5}{\sqrt{\cos x}}=0.$

Ответ: $-\arcsin\frac{5}{6}+2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}.$

84. Решите уравнение:
$$\frac{(2y+7\pi)(4y+7\pi)(8y+7\pi)}{\sqrt{\cos y}}=0.$$
Ответ: $-\frac{7\pi}{4}.$

85. Решите уравнение:
$$\frac{(2y+9\pi)(4y-9\pi)(13y-9\pi)}{\sqrt{\cos y}}=0.$$
Ответ: $\frac{9\pi}{4}.$

86. Решите уравнение:
$$\frac{4^{\cos^2\frac{x}{2}}}{\left(\sqrt{2}\right)^{\sin x}}=\left(2^{\sin\frac{x}{2}}\right)^{\sin\frac{x}{2}}.$$
Ответ: $\frac{\pi}{2}+2\pi k;-2\mathrm{arctg}2+2\pi n;k,n\in\mathbf{Z}.$

87. Решите уравнение:
$$3^{\cos^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{\sqrt{3^3}}{\left(\sqrt{3}\right)^{\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}}.$$
Ответ: $-\frac{\pi}{4}+2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}.$

88. Решите уравнение: $\log_{\cos x}\sin x=1.$

Ответ: $\frac{\pi}{4}+2\pi k,\ k\in\mathbf{Z}.$

89. Решите уравнение: $\log_{\sin x}\sqrt{3}\cos x=1$

Ответ: $\frac{\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\mathbf{Z}.$

90. Решите уравнение
$$\log_3\sin x+\log_3\cos x=\log_3(1-\cos 60^\circ).$$
Ответ: $\frac{\pi}{4}+2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}.$

91. Решите уравнение
$$\log_{\sqrt{3}}(2\sin^2 x-1)=\log_{\sqrt{3}}\sin x.$$
Ответ: $\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}.$

92. Решите уравнение:
$$\log_{\sqrt{5}}\cos x=\log_{\sqrt{5}}(1-2\cos^2 x).$$
Ответ: $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}.$

93. Решите уравнение:
$$(2\cos^2 x-7\cos x+3)\log_{41}(-\sin x)=0.$$
Ответ: $-\frac{\pi}{3}+2\pi n;\ -\frac{\pi}{2}+2\pi n;\ n\in\mathbf{Z}.$

94. Решите уравнение:
$$(2\sin^2 x-7\sin x+3)\log_{14}(-\cos x)=0.$$
Ответ: $\frac{5\pi}{6}+2\pi n;\ \pi+2\pi n;\ n\in\mathbf{Z}.$

95. Решите уравнение:

$$\frac{\cos x(2\cos x-1)(2\cos x-\sqrt{3})}{\log_6(\sqrt{3}\mathrm{tg}x)}=0.$$

Ответ: $\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$.

96. Решите уравнение:

$$\frac{\sin x(2\sin x+1)(\sqrt{2}\sin x-1)}{\lg(\mathrm{tg}x)}=0.$$

Ответ: $-\frac{5\pi}{6}+2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$.

97. Решите уравнение:

$$\frac{(\mathrm{tg}x+\sqrt{3})\log_{13}(2\sin^2 x)}{\log_{31}(\sqrt{2}\cos x)}=0.$$

Ответ: $-\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$.

98. Решите уравнение:

$$\frac{(2\cos x+1)\log_{13}(3\mathrm{tg}^2 x)}{\log_{31}(2\sin x)}=0.$$

Ответ: $\frac{2\pi}{3}+2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$.

99. Решите уравнение: $\frac{\log_2(2\sin x)}{\sqrt{-3\cos x}}=0$.

Ответ: $\frac{5\pi}{6}+2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$.

100. Решите уравнение:

$$\frac{\log_5(-2\cos x)}{\sqrt{5\mathrm{tg}x}}=0.$$

Ответ: $-\frac{2\pi}{3}+2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$.

101. Решите уравнение: $\frac{\log_7(\sqrt{3}\mathrm{tg}x)}{\sqrt{-7\sin x}}=0$.

Ответ: $\frac{7\pi}{6}+2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$.

102. Решите уравнение

$$\sqrt{1+3\sin x-\sin^2 x}=\cos x.$$

Ответ: $2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$.

103. Решите уравнение:

$$\sqrt{1-4\cos x-\cos^2 x}=\sin x.$$

Ответ: $\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$.

104. Решите уравнение:

$$\sqrt{x^2+(2-5\pi)x+6\pi^2-4\pi}+$$
$$+\sqrt{\sin(x-13\pi)}=0$$

Ответ: 2π.

105. Решите уравнение:

$$\sqrt{x^2-(3+\pi)x-6\pi^2+9\pi}+$$
$$+\sqrt{\cos\left(x+\frac{13\pi}{2}\right)}=0$$

Ответ: 3π.

106. Решите уравнение:

$$\sin\pi x+\cos\pi x=2^{\log_3\sqrt{x^2-\frac{1}{2}x+\frac{49}{16}}}.$$

Ответ: $\frac{1}{4}$.

107. Решите уравнение: $|\sin 2x|=\cos x$.

Ответ: $\frac{\pi}{2}+\pi n;\ \pm\frac{\pi}{6}+2\pi k,\ n,k\in\mathbf{Z}$.

108. Решите уравнение: $\mathrm{ctg}x\,|\sin x|=0{,}5$.

Ответ: $-\frac{2\pi}{3}+2\pi k;\frac{\pi}{3}+2\pi n;\ n\in\mathbf{Z}$.

109. Решите уравнение:

$$|\cos x|-\cos x=2\sin x.$$

Ответ: $2\pi k;\ -\frac{5\pi}{4}+2\pi n;\ k,n\in\mathbf{Z}$.

110. Решите уравнение:

$$4|\sin x|+2\cos 2x=3.$$

Ответ: $\pm\frac{\pi}{6}+\pi n;\ n\in\mathbf{Z}$.

111. Решите уравнение:

$$\left|\sin x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right|=\cos x-\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Ответ: $\frac{\pi}{4}+2\pi n;\ n\in\mathbf{Z}$.

112. Найдите все решения уравнения $\sin 2x=\cos x\,|\cos x|$ из промежутка $[0;2\pi]$.

Ответ: $\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2};\mathrm{arctg}\frac{1}{2};\pi-\mathrm{arctg}\frac{1}{2}$.

113. Решите уравнение:

$$\frac{\sin 2x}{|\cos x|}=2\sin x-2.$$

Ответ: $\frac{5\pi}{6}+2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$.

114. Решите уравнение:

$$\sqrt{(3\cos 0{,}5x-4)^2}-$$
$$-\sqrt{\cos^2 0{,}5x-6\cos 0{,}5x+9}=1.$$

Ответ: $\pi+2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$.

115. Решите уравнение:

$$\sqrt{(3\sin x-4)^2}+$$
$$+\sqrt{\sin^2 x-6\sin x+9}=7+2\sqrt{3}.$$

Ответ: $(-1)^{n+1}\dfrac{\pi}{3}+\pi n;\ n\in\mathbf{Z}$.

116. Решите уравнение:

$$\sqrt{(2\sin 0{,}2x-3)^2}-$$
$$-\sqrt{\sin^2 0{,}2x-2\sin 0{,}2x+1}=2.$$

Ответ: $5\pi n;\ n\in\mathbf{Z}$.

116. Решите уравнение:

$$2|\cos x|-3\cos x-4|\sin x|-5\sin x=0.$$

Ответ: $\pi-\operatorname{arctg}\dfrac{5}{9}+2\pi n,\ -\dfrac{\pi}{4}+2\pi k,$
$n,k\in\mathbf{Z}$.

117. Решите уравнение:

$$4|\cos x|+6\cos x-5|\sin x|+3\sin x=0.$$

Ответ: $-\operatorname{arctg}\dfrac{5}{4}+2\pi n,\ \operatorname{arctg}5+2\pi k,$
$n,\ k\in\mathbf{Z}$.

118. Решите уравнение:

$$\cos\left(22\pi-\frac{13x}{4}\right)=3^{\sqrt{x}}.$$

Ответ: 0.

119. Решите уравнение:

$$2^{\sqrt{x}}=\sin\left(\frac{11x}{3}+\frac{33\pi}{2}\right).$$

Ответ: 0.

120. Решите уравнение:

$$2^{\cos(\pi x+\pi)}=x^2-6x+11.$$

Ответ: 3.

121. Решите уравнение:

$$3^{\sin\left(\pi x+\frac{\pi}{2}\right)}=x^2+4x+7.$$

Ответ: –2.

122. Решите уравнение:

$$\cos x-1=x^2-4\pi x+4\pi^2.$$

Ответ: 2π.

123. Решите уравнение:

$$x^2-\pi x+\frac{\pi^2}{4}=\sin x-1.$$

Ответ: $\dfrac{\pi}{2}$.

124. Решите уравнение:

$$x^2-6x+10=\sin\frac{3\pi}{2}x.$$

Ответ: 3.

125. Решите уравнение:

$$x^2+4x+5=\cos 4\pi x.$$

Ответ: –2.

126. Решите уравнение:

$$-2\cos x-\sqrt{x^2-\frac{3\pi}{2}x+\frac{\pi^2}{2}}=2.$$

Ответ: π.

127. Решите уравнение:

$$3\sin x+\sqrt{x^2-\frac{\pi}{2}x-\frac{\pi^2}{2}}=-3.$$

Ответ: $-\dfrac{\pi}{2}$.

128. Решите уравнение:

$$\arcsin(2x^3+2x^2-3x-0{,}2)=$$
$$=\arcsin(3x^2-2x-0{,}2).$$

Ответ: 0; 1.

129. Решите уравнение

$$\arccos(2x^3+5x^2+x+0{,}2)=$$
$$=\arccos(2x+4x^2+0{,}2).$$

Ответ: 0.

130. Решите уравнение:

$$\operatorname{arctg}(4x^2-8x-9)+\operatorname{arctg}16x^2=0.$$

Ответ: –0,5; 0,9.

131. Решите уравнение:

$$(x^2-5x+6)\arcsin\frac{x}{2}=0.$$

Ответ: 0; 2.

132. Решите уравнение:

$$(x+2)(2x^2-7x+3)\arccos\frac{x}{2}=0.$$

Ответ: –2; 0,5; 2.

133. Решите уравнение:

$$14\sin^2 x + \cos 4x - 10 = 0.$$

Ответ: $\pm\frac{\pi}{3} + \pi k,\ k \in \mathbf{Z}$.

134. Решите уравнение:

$$\sin x \cdot \sin 5x = \cos 4x.$$

Ответ: $\frac{\pi}{10} + \frac{\pi}{5}\cdot k,\ k \in \mathbf{Z}$.

135. Решите уравнение:

$$\cos x \cdot \cos 5x = \cos 6x.$$

Ответ: $\frac{\pi}{5}\cdot k,\ k \in \mathbf{Z}$.

136. Укажите все корни уравнение

$$\sin 2x + \sqrt{2}\sin x = 0,$$

принадлежащие отрезку $\left[-\frac{3\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$.

Ответ: $-1{,}25\pi; -\pi; -0{,}75\pi; 0; 0{,}75\pi; \pi; 1{,}25\pi$.

137. Укажите наибольший корень уравнения $\cos 2x + 3\sin x = 2$, принадлежащий отрезку $[-3\pi; -\pi]$.

Ответ: $-\frac{7\pi}{6}$.

138. Укажите наименьший корень уравнения $\cos 2x + 2 = 3\cos x$, принадлежащий отрезку $[-2{,}5\pi; -0{,}5\pi]$.

Ответ: $-\frac{7\pi}{3}$.

139. Решите уравнение:

$$\cos 3x \cdot \cos 2x = -1.$$

Ответ: $\pi + 2\pi k,\ k \in \mathbf{Z}$.

140. Решите уравнение

$$\sin 3x \cdot \cos 2x = 1.$$

Ответ: $\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \mathbf{Z}$.

141. Решите уравнение:

$$\sqrt{(x+1)^2 + 16} = 4 - \sin^2 \pi x.$$

Ответ: -1.

142. Решите уравнение:

$$3\sin x \cdot \mathrm{tg}x - 3\mathrm{tg}x - 2\cos x = 0.$$

Ответ: $(-1)^{k+1}\arcsin 0{,}4 + \pi k,\ k \in \mathbf{Z}$.

143. Решите уравнение:

$$\log_3(\cos x) = \log_3(-\sin x).$$

Ответ: $-\frac{\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in \mathbf{Z}$.

144. Решите уравнение:

$$\cos\sqrt{2 - x^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Ответ: $\pm\sqrt{2 - \frac{\pi^2}{36}}$.

145. Решите уравнение:

$$\sin\sqrt{3 - x^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Ответ: $\pm\frac{\sqrt{27 - \pi^2}}{3}$.

146. Решите уравнение:

$$\left(\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\sqrt{4x^2 - 7x + 3} = 0.$$

Ответ: $\frac{3}{4}; 1; -\frac{\pi}{4} + 2\pi k; \frac{\pi}{4} + 2\pi n;$
$n, k \in \mathbf{Z}, n \neq 0$.

147. Решите уравнение:

$$\left(\sin x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\sqrt{3x^2 - 7x + 4} = 0.$$

Ответ: $1; \frac{4}{3};\ \frac{2\pi}{3} + 2\pi k; \frac{\pi}{3} + 2\pi n;$

$n, k \in \mathbf{Z}, n \neq 0$.

148. Решите уравнение:

$$\sqrt{\sin 3x} = \sqrt{1 + 2\sin 4x\cos x}.$$

Ответ: $\frac{3\pi}{10} + 2\pi k; \frac{7\pi}{10} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi m;$
$n, k, m \in \mathbf{Z}$.

149. Решите уравнение:

$$\sqrt{1 - 2\sin 3x \sin 7x} = \sqrt{\cos 10x}.$$

Ответ: $\pi k;\ k \in \mathbf{Z}$.

150. Решите уравнение:

$$\sqrt{\cos 2t - 3\sin 2t} = \cos t.$$

Ответ: $2\pi n; -\mathrm{arctg}6 + 2\pi k,\ n, k \in \mathbf{Z}$.

151. Решите уравнение:

$$\sqrt{5\sin 2t-\cos 2t}=\sin t.$$

Ответ: $\frac{\pi}{2}+2\pi n$; $\mathrm{arctg}0{,}1+2\pi k$, $n,k\in\mathbf{Z}$.

152. Решите уравнение:

$$\log_2(x^2-4x+8)=\sin\frac{5\pi x}{4}-\cos\frac{5\pi x}{4}.$$

Ответ: 2.

153. Решите уравнение:

$$\log_3(x^2+4x+13)=\cos\pi x-\sin\frac{\pi x}{4}.$$

Ответ: –2.

154. Решите уравнение:

$$|\cos((x-2)\cos x)|=$$
$$=1+|\log_4(9x^2-39x+43)|.$$

Ответ: 2.

155. Решите уравнение:

$$|\sin x|=\sin x\cos x.$$

Ответ: πn; $n\in\mathbf{Z}$.

156. Решите уравнение:

$$\cos x+\cos 3x=|\sin 2x|.$$

Ответ: $\frac{\pi}{2}+\pi n$; $\pm\frac{\pi}{6}+2\pi k$, $n,k\in\mathbf{Z}$.

157. Решите уравнение:

$$\sin x-\sin 3x=|\cos 2x|.$$

Ответ: $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}$; $-\frac{5\pi}{6}+2\pi n$; $-\frac{\pi}{6}+2\pi m$; $n,k,m\in\mathbf{Z}$.

158. Найдите все решения уравнения

$$\left|\cos x-\frac{1}{4}\right|=8\cos^2\frac{x}{2}-5$$

на отрезке $[-\pi;\pi]$.

Ответ: $\pm\arccos\frac{1}{4}$.

159. Найдите значение выражения $\cos 2\alpha$, если α удовлетворяет условию $\sin 4\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2};\frac{1}{2}$.

160. Найдите значение выражения $\sin 3\alpha$, если α удовлетворяет условию $\sin 6\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2};\frac{1}{2}$.

161. Решите уравнение:

$$-\sqrt{1+\cos 2x}+3\sqrt{\cos(x-\pi)}=\sqrt{2}.$$

Ответ: $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n$; $n\in\mathbf{Z}$.

162. Решите уравнение:

$$\sqrt{1-\cos x}+\sqrt{\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{2}\right)}=\sqrt{2}.$$

Ответ: $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{3}+2\pi n$; $n\in\mathbf{Z}$.

163. Решите уравнение:

$$\frac{2\cos^2 x-1}{(2\cos x-\sqrt{2})\sqrt{\sin x}}=0.$$

Ответ: $\frac{3\pi}{4}+2\pi n$; $n\in\mathbf{Z}$.

164. Сколько различных корней имеет уравнение

$$(\cos^2 x-\sin^2 x)\sqrt{1-x^2}=0\,?$$

Ответ: 4.

165. Сколько различных корней имеет уравнение $(\sin\pi x+1)\log_{0,5}(1-x^2)=0$?

Ответ: 2.

166. Сколько различных корней имеет уравнение

$$\sqrt{-x^2-21\pi x}(\sin 3x\cos 6x-\sin x\cos 8x)=0\,?$$

Ответ: 127.

167. Найдите сумму различных корней уравнения

$$4\sin^2 7\pi x\cos^2 7\pi x+\sin^2\left(\frac{3\pi}{2}+14\pi x\right)=$$
$$=\frac{\sin\left(3\pi-\frac{5\pi x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\frac{5\pi x}{2}\right)}+\cos\left(\frac{4\pi x}{3}-\frac{5\pi}{6}\right)$$

на отрезке $[3;5]$.

Ответ: 8.

168. Решите уравнение:

$$\sqrt{\cos x+\sin 2x+\sin^2\frac{1}{x^2}}+\sin\frac{1}{x^2}=0.$$

Ответ: $-\frac{\pi}{6}$.

169. Найдите все решения уравнения

$$\sin^2 3x+\sin^2 5x=2\sin^2 4x,$$

для которых определено выражение $\operatorname{tg}\left(2x+\frac{\pi}{8}\right)$.

Ответ: $\pi n;\ \frac{\pi}{16}+\frac{\pi k}{8};\ n,k\in\mathbf{Z}$, $k\neq 4m+1;\ m\in\mathbf{Z}$.

170. Найдите все решения уравнения

$$\cos^2 4x-2\cos^2 5x+\cos^2 6x=0,$$

для которых определено выражение $\operatorname{ctg}\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)$.

Ответ: $\pi n;\ \frac{\pi}{20}+\frac{\pi k}{10};$ $n,k\in\mathbf{Z}, k\neq 5m+2;\ m\in\mathbf{Z}$.

Список и источники литературы

1. Денищева Л.О., Глазков Ю.А., Краснянская К.А., Рязановский А.Р., Семенов П.В. Единый государственный экзамен 2008. Математика. Учебно-тренировоч-ные материалы для подготовки учащихся / ФИПИ – М.: Интеллект –Центр, 2007.

2. ЕГЭ-2011. Математика: типовые экзаменационные варианты: 30 вариантов / под ред. А.Л. Семенова, И.В. Ященко. – М.: Национальное образование, 2010.

3. ЕГЭ-2011. Математика: типовые экзаменационные варианты: 10 вариантов / под ред. А.Л. Семенова, И.В. Ященко. – М.: Национальное образование, 2010.

4. ЕГЭ 2011. Математика. Типовые тестовые задания /под ред. А.Л. Семенова, И.В. Ященко. – М.: Издательство «Экзамен», 2011.

5. Единый государственный экзамен 2011. Математика. Универсальные материалы для подготовки учащихся / ФИПИ – М.: Интеллект-Центр, 2011.

6. Задачи письменного экзамена по математике за курс средней школы. Условия и решения. Вып. 1-6, 8, 12, 14, 18, 25. – М.: Школьная Пресса, – (Библиотека журнала «Математика в школе»), 1993-2003.

7. Самое полное издание типовых вариантов реальных заданий ЕГЭ 2011: Математика /авт.-сост. И.Р. Высоцкий, Д.Д. Гущин, П.И. Захаров и др.; под ред. А.Л. Семенова, И.В. Ященко. – М.: АСТ: Астрель, 2011. – (Федеральный институт педагогических измерений).

8. Шестаков С.А., Захаров П.И. ЕГЭ 2011. Математика. Задача С1 / Под ред. А.Л. Семенова, И.В. Ященко. – М.: МЦНМО, 2011.

9. www.alexlarin.narod.ru – сайт по оказанию информационной поддержки студентам и абитуриентам при подготовке к ЕГЭ, поступлению в ВУЗы и изучении различных разделов высшей математики.

10. http://eek.diary.ru/ – сайт по оказанию помощи абитуриентам, студентам, учителям по математике.

11. www.egemathem.ru – единый государственный экзамен (от А до Я).