Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

C1 Решите уравнение $\dfrac{6\sin^2 x+7\sin x-5}{\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,x-1}=0$.

Решение.

Левая часть уравнения имеет смысл при $\mathrm{tg}\,x\neq\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

$6\sin^2 x+7\sin x-5=0$, откуда $\sin x=-\dfrac{5}{3}$ или $\sin x=\dfrac{1}{2}$.

Уравнение $\sin x=-\dfrac{5}{3}$ не имеет решений.

Учитывая, что $\mathrm{tg}\,x\neq\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, из уравнения $\sin x=\dfrac{1}{2}$ получаем: $x=\dfrac{5\pi}{6}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$.

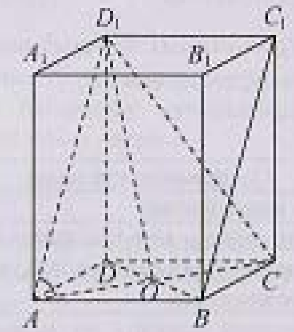
Ответ: $\dfrac{5\pi}{6}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно найдены все значения переменной x, при которых равен нулю числитель левой части исходного уравнения, но отбор найденных значений либо не произведён, либо произведён неверно	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

C2 В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$, стороны основания которой равны 3, а боковые рёбра равны 4, найдите угол между прямыми AC и BC_1.

Решение.

Искомый угол равен углу CAD_1. Треугольник CAD_1 — равнобедренный, $AD_1=CD_1=5$, $AC=3\sqrt{2}$. Пусть O — середина отрезка AC. Из прямоугольного треугольника AOD_1 находим $\cos\angle CAD_1=\dfrac{3\sqrt{2}}{10}$.



Ответ: $\arccos\dfrac{3\sqrt{2}}{10}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Способ нахождения искомого угла верный, но получен неверный ответ или решение не закончено	1
Решение не удовлетворяет ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

C3 Решите неравенство $\log_{\frac{1}{2}}\left(5^{1+\lg x}-\dfrac{1}{2^{1+\lg x}}\right)\geq -1+\lg x$.

Решение.

Решение будем искать при условиях

$$\begin{cases} x>0,\\ 5^{1+\lg x}-\dfrac{1}{2^{1+\lg x}}>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x>0,\\ \lg x>-1,\end{cases}$$

откуда $x>\dfrac{1}{10}$.

Преобразуем левую часть:

$$\log_{\frac{1}{2}}\left(5^{1+\lg x}-\frac{1}{2^{1+\lg x}}\right)=-\log_2\frac{10^{1+\lg x}-1}{2^{1+\lg x}}=$$

$$=-\log_2\left(10^{1+\lg x}-1\right)+1+\lg x=-\log_2(10x-1)+1+\lg x.$$

$-\log_2(10x-1)+1+\lg x\geq -1+\lg x$, $\log_2(10x-1)\leq 2$, откуда $0<10x-1\leq 4$,

значит, $\dfrac{1}{10}<x\leq\dfrac{1}{2}$.

С учетом области допустимых значений получаем $x \in \left(\frac{1}{10}; \frac{1}{2}\right]$.

Ответ: $\left(\frac{1}{10}; \frac{1}{2}\right]$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного только конечным количеством значений переменной, в которых определены обе части исходного неравенства	2
Решение содержит верный переход от исходного неравенства к рациональным неравенствам или верно найдены все значения переменной, при которых обе части исходного неравенства имеют смысл	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

C4 Окружность, вписанная в треугольник ABC, площадь которого равна 36, касается средней линии, параллельной стороне BC. Известно, что $BC = 9$. Найдите сторону AB.

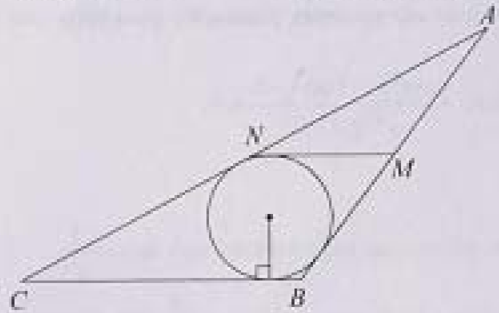
Решение.

Обозначим $AB = x, AC = y, p$ — полупериметр треугольника ABC. Пусть M и N — середины сторон AB и AC соответственно. Тогда $MN = \frac{1}{2} \cdot BC = \frac{9}{2}$.

В трапецию $BMNC$ вписана окружность, поэтому $BM + CN = BC + MN = 9 + \frac{9}{2} = \frac{27}{2}$, значит,

$$x + y = AB + AC = 2BM + 2CN = 2(BM + CN) = 2 \cdot \frac{27}{2} = 27;$$

$$p = \frac{AB + AC + BC}{2} = \frac{x + y + 9}{2} = \frac{27 + 9}{2} = 18.$$



По формуле Герона

$$S_{ABC} = \sqrt{p(p - AB)(p - AC)(p - BC)} = \sqrt{18(18 - x)(18 - y)(18 - 9)} =$$
$$= 9\sqrt{2(18 - x)(18 - y)} = 36.$$

$$\sqrt{2(18 - x)(18 - y)} = 4; (18 - x)(18 - y) = 8; (18 - x)(18 - 27 + x) = 8;$$

$$x^2 - 27x + 170 = 0; (x - 10)(x - 17) = 0.$$

Отсюда находим, что $x = 10$ или $x = 17$.

Ответ: 10 или 17.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
В решении получено уравнение, из которого можно получить значение искомой величины, но она найдена неверно из-за вычислительной ошибки	2
В решении получено уравнение, из которого можно получить значение искомой величины, но уравнение не решено или его решение не закончено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

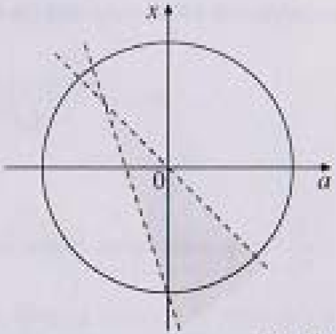
C5 Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} x^2 + (4a + 5)x + 3a^2 + 5a < 0, \\ x^2 + a^2 = 25 \end{cases}$$

имеет решения.

Решение.

Разложим левую часть неравенства на множители: $(x + 3a + 5) \cdot (x + a) < 0$. Это неравенство задаёт пару вертикальных углов в плоскости Oax (см. рис.).



Уравнение задаёт окружность с центром $(0;\ 0)$ радиуса 5. Решения системы — точки дуг окружности, лежащие в указанных вертикальных углах. Абсциссы концов этих дуг находим из систем

$$\begin{cases} x+3a+5=0, \\ x^2+a^2=25 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x+a=0, \\ x^2+a^2=25. \end{cases}$$

Из первой системы: $a=-3,\ a=0$. Из второй системы: $a=-\frac{5\sqrt{2}}{2},\ a=\frac{5\sqrt{2}}{2}$.

Ответ: $\left(-\frac{5\sqrt{2}}{2};\ -3\right);\ \left(0;\ \frac{5\sqrt{2}}{2}\right)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
Решение в целом верное, но содержит вычислительную ошибку, возможно приведшую к неверному ответу	3
Получена верная геометрическая интерпретация или при алгебраическом решении верно найдены корни квадратного трехчлена и описаны все случаи принадлежности корней уравнения множеству решений неравенства. Числовые границы промежутков не найдены	2
Геометрическая интерпретация неполная, например, рассмотрен только один из двух вертикальных углов. При алгебраическом решении верно найдены корни квадратного трехчлена, но описаны не все случаи принадлежности корней уравнения множеству решений неравенства	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

C6 Число N равно произведению 10 различных натуральных чисел, больших 1. Какое наименьшее число различных натуральных делителей (включая единицу и само число) может иметь число N?

Решение.

Докажем, что у любого числа N, удовлетворяющего условию, заведомо есть 56 различных делителей. Действительно, пусть $N=a_1a_2\ldots a_{10}$, где $a_1<a_2<\ldots<a_{10}$. Тогда числа

$$1<$$
$$<a_1<a_2<$$
$$<a_1a_2<a_1a_3<a_2a_3<$$
$$<a_1a_2a_3<a_1a_2a_4<a_1a_3a_4<a_2a_3a_4<$$
$$<a_1a_2a_3a_4<a_1a_2a_3a_5<a_1a_2a_4a_5<a_1a_3a_4a_5<a_2a_3a_4a_5<\ldots$$
$$\ldots$$
$$<a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8a_9<\ldots<a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8a_9a_{10}<$$
$$<a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8a_9a_{10}$$

попарно различны и являются делителями числа N, а их количество равно $1+2+3+\ldots+9+10+1=56$. Значит, меньше чем 56 делителей у числа N быть не может.

Приведём пример числа, удовлетворяющего условию, у которого ровно 56 различных делителей: $N=2\cdot2^2\cdot2^3\cdot\ldots\cdot2^{10}=2^{55}$.

Ответ: 56.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
Решение в целом верное, но содержит вычислительную ошибку, возможно приведшую к неверному ответу	3
В решении содержатся верные идеи доказательства минимальности числа делителей	2
Приведён пример с наименьшим возможным числом делителей или указано, что примером является степень простого числа. Доказательство минимальности отсутствует	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4