

Задания С1

- (Д – 2010) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + 3x - \sqrt{x^2 + 3x - 1} = 7 \\ 2\sqrt{2} \sin y = x \end{cases}$$

Ответ: $x = 2, y = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z.$

1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 5 \cdot 5^{\operatorname{tg} y} + 4 = 5^{-\operatorname{tg} y} \\ \sqrt{x-5} + 4 \cos y = 0 \end{cases}$$

Ответ: $\left(13; \frac{3\pi}{4} + 2\pi n\right), n \in Z.$

2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2^y + 2 \sin x = 0 \\ \operatorname{tg} x + 1 = \frac{1}{\cos^2 x} \end{cases}$$

Ответ: $\left(\frac{5\pi}{4} + 2\pi n; 0,5\right), n \in Z.$

3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 4^{\sin y} - 5 \cdot 2^{\sin y} + 4 = 0 \\ \sqrt{x} + 5 \cos y + 1 = 0 \end{cases}$$

Ответ: $(16; \pi + 2\pi n), n \in Z.$

4. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 4 \cos^2 x - 12 \cos x + 5 = 0 \\ \sqrt{y^2 - 4y + 16} + 4 \sin x = 0 \end{cases}$$

Ответ: $\left(-\frac{\pi}{3} + 2\pi n; 2\right), n \in Z.$

5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{y + \cos^2 x - 2} = \cos x \\ y \sin^2 x - \sin x - 1 = 0 \end{cases}$$

Ответ: $\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n; 2\right), n \in Z;$

$\left(-\frac{\pi}{6} + 2\pi k; 2\right), k \in Z.$

6. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 4^y - 10 \cdot 2^y + 16 = 0 \\ \cos x = \sqrt{y-2} \end{cases}$$

Ответ: $(2\pi n; 3), n \in Z.$

7. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 16^{\cos x} - 10 \cdot 4^{\cos x} + 16 = 0 \\ \sqrt{y} + 2 \sin x = 0 \end{cases}$$

Ответ: $\left(-\frac{\pi}{3} + 2\pi n; 3\right), n \in Z.$

8. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3^{y+1} = 2 \cos x \\ 3^{-y} = 4 \cos x + 1 \end{cases}$$

Ответ: $\left(\pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n; -1\right), n \in Z.$

9. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sin x = y - 3 \\ \cos x = y - 2 \end{cases}$$

Ответ: $(2\pi n; 3), n \in Z; \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; 2\right), k \in Z.$

10. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sin y = x - 6 \\ \cos y = x - 7 \end{cases}$$

Ответ: $(6; \pi + 2\pi n), n \in Z; \left(7; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right), k \in Z.$

11. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2^x = \sin y \\ 2^{-x} = 2 \sin y + 1 \end{cases}$$

Ответ: $\left(-1; (-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n\right), n \in Z.$

12. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 81^{\sin y} - 30 \cdot 9^{\sin y} + 81 = 0 \\ \sqrt{x} + 2 \cos y = 0 \end{cases}$$

Ответ: $\left(3; \frac{5\pi}{6} + 2\pi n\right), n \in Z.$

13. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2 \sin^2 y + 3 \sin y - 2 = 0 \\ \sqrt{x^2 - x} + 4 \cos y = 0 \end{cases}$$

Ответ: $\left(-3; \frac{5\pi}{6} + 2\pi n\right), n \in Z;$

$\left(4; \frac{5\pi}{6} + 2\pi k\right), k \in Z.$

14. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3 \sin x = \cos 2x + 1 \\ \sqrt{y^2 + 6y} + 6 \cos x = 0 \end{cases}$$

Ответ: $\left(\frac{5\pi}{6} + 2\pi n; 3\right), n \in Z;$

$$\left(\frac{5\pi}{6} + 2\pi k; -9\right), k \in Z;$$

15. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{2x^2 - 4xy + 4y^2 - 16} = x - 2y \\ y^2 - 2xy + 16 = 0 \end{cases}$$

Ответ: $(-4; 4)$.

16. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{2y^2 - 2xy + x^2 - 25} = y - x \\ x^2 - 4xy + 100 = 0 \end{cases}$$

Ответ: $(-10; -5)$.

17. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2\sin^2 x - 7\sin x + 3 = 0 \\ 6\sin x + 5y = 13 \end{cases}$$

Ответ: $\left((-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n; 2\right), n \in Z$.

18. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2\cos^2 y + 11\cos y + 5 = 0 \\ 5\cos x - 2\cos y + 4 = 0 \end{cases}$$

Ответ: $\left(\pi + 2\pi n; \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k\right), n \in Z, k \in Z$.

19. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2\operatorname{tg}x + 5y = 12 \\ 2\operatorname{tg}x + 3y = 8 \end{cases}$$

Ответ: $\left(\frac{\pi}{4} + \pi n; 2\right), n \in Z$.

20. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3\operatorname{tg}x + 4\cos y = 5 \\ 3\operatorname{tg}x + 8\cos y = 7 \end{cases}$$

Ответ: $\left(\frac{\pi}{4} + \pi n; \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k\right), n \in Z, k \in Z$.

21. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3^y + 2\cos x = 0 \\ 2\sin^2 x - 3\sin x - 2 = 0 \end{cases}$$

Ответ: $\left(-\frac{5\pi}{6} + 2\pi n; \frac{1}{2}\right), n \in Z$;

22. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3^x + 2\sin y = 0 \\ 4\cos^2 y - 4\cos y - 3 = 0 \end{cases}$$

Ответ: $\left(\frac{1}{2}; -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n\right), n \in Z$;

23. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 = 8\sin y + 1 \\ x + 1 = 2\sin y \end{cases}$$

Ответ: $(-1; \pi n), n \in Z$;

24. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y^2 = 4\cos x + 1 \\ y + 1 = 2\cos x \end{cases}$$

Ответ: $\left(\frac{\pi}{2} + \pi n; -1\right), n \in Z$.

25. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \cos y \sqrt{\sin x} = 0 \\ 2\sin^2 x = 2\cos^2 y + 1 \end{cases}$$

Ответ: $\left((-1)^n \cdot \frac{\pi}{4} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi k\right), n \in Z, k \in Z$.

26. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sin y \sqrt{\cos x} = 0 \\ 2\sin^2 x + 2\cos^2 y = 3 \end{cases}$$

Ответ: $\left(\pm \frac{\pi}{4} + 2\pi n; \pi k\right), n \in Z, k \in Z$;

$\left(\frac{\pi}{2} + \pi n; \pm \frac{\pi}{4} + \pi k\right), n \in Z, k \in Z$.

27. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 4\cos^2 x - 4\cos x - 3 = 0 \\ \sqrt{y^2 - y - 3} + 2\sin x = 0 \end{cases}$$

Ответ: $\left(-\frac{2\pi}{3} + 2\pi n; 3\right), n \in Z$;

$\left(-\frac{2\pi}{3} + 2\pi k; -2\right), k \in Z$.

28. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \cos 2y = \cos y \\ \sqrt{x^2 - 2x} = 2\sin y \end{cases}$$

Ответ: $(0; 2\pi n); (2; 2\pi n)$;

$\left(3; \frac{2\pi}{3} + 2\pi n\right); \left(-1; \frac{2\pi}{3} + 2\pi n\right), n \in Z$.

29. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x\operatorname{tg}y = 9 \\ x\operatorname{ctg}y = 3 \end{cases}$$

Ответ: $\left(3\sqrt{3}; \frac{\pi}{3} + \pi n\right), n \in Z$;

$\left(-3\sqrt{3}; -\frac{\pi}{3} + \pi k\right), k \in Z$.

30. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y\operatorname{tg}x = -2 \\ y\operatorname{ctg}x = -6 \end{cases}$$

Ответ: $\left(-\frac{\pi}{6} + \pi n; 2\sqrt{3}\right), n \in Z$;

$$\left(\frac{\pi}{6} + \pi k; -2\sqrt{3}\right), k \in Z.$$

31. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{\sin 2x - \cos x}{\sqrt{y+1}} = 0 \\ y = 4 \sin x - 3 \end{cases}$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z, y = 1.$

32. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{\sin 2x + \cos x}{\sqrt{y-1}} = 0 \\ y = 4 \sin x + 3 \end{cases}$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z, y = 7.$

33. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{2 \sin^2 x - 3 \sin x + 1}{\sqrt{y}} = 0 \\ y - \cos x = 0 \end{cases}$$

Решение. Из первого уравнения системы следует $2 \sin^2 x - 3 \sin x + 1 = 0$ и $y > 0$. Пусть $\sin x = t$, где $-1 \leq t \leq 1$. Из уравнения $2t^2 - 3t + 1 = 0$ получаем корни $t_1 = 1, t_2 = \frac{1}{2}$,

которые удовлетворяют условию $-1 \leq t \leq 1$.

а) Если $\sin x = 1$, то $\cos x = 0$ и из второго уравнения системы имеем $y = 0$. Это значение не удовлетворяет условию $y > 0$.

б) Пусть $\sin x = \frac{1}{2}$, тогда из тождества

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \quad \text{получаем} \quad \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{и}$$

$\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Отсюда $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ или $y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ (не удовлетворяет условию $y > 0$).

Из уравнения $\sin x = \frac{1}{2}$ имеем

$$x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z.$$

Таким образом, исходная система имеет реше-

$$\text{ния } x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z, y = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z, y = \frac{\sqrt{3}}{2}.$

Критерии:

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ.	2
Получен ответ, возможно, неверный, но только из-за того, что в решении не учтено, что знаменатель дроби существует и отличен от нуля.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

34. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{2 \sin^2 x + 3 \sin x + 1}{\sqrt{-y}} = 0 \\ y = -\cos x \end{cases}$$

Ответ: $x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z, y = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$

35. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{16^{\sin x} - 6 \cdot 4^{\sin x} + 8}{\log_2(1-2y)} = 0 \\ y = \cos x \end{cases}$$

Ответ: $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z, y = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$

36. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{81^{\cos x} - 12 \cdot 9^{\cos x} + 27}{\log_7(1+2y)} = 0 \\ y = \sin x \end{cases}$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z, y = \frac{\sqrt{3}}{2}.$

37. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sin x - \sin y = 1 \\ \sin^2 x + \cos^2 y = 1 \end{cases}$$

Ответ:

$$\left((-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n; (-1)^{k+1} \cdot \frac{\pi}{6} + \pi k \right), n \in Z, k \in Z.$$

38. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} (2x^2 - 5x - 3)\sqrt{\cos y} = 0 \\ \sin y = x \end{cases}$$

Ответ: $\left((-1)^n; \frac{\pi}{2} + \pi n \right), n \in Z;$

$$\left(-\frac{1}{2}; -\frac{\pi}{6} + 2\pi k \right), k \in Z.$$

39. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \cos(x+y) = -\frac{1}{2} \\ \sin x + \sin y = \sqrt{3} \end{cases}$$

Ответ: $\left(\frac{\pi}{3} + 2\pi n; \frac{\pi}{3} + 2\pi k\right);$

$\left(\frac{2\pi}{3} + 2\pi n; \frac{2\pi}{3} + 2\pi k\right), n \in Z, k \in Z.$

40. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sin x + \sin y = 1 \\ |x - y| = \frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

Решение. Рассмотрим два случая, связанные с раскрытием модуля.

1. Если $x - y = \frac{2\pi}{3}$, то $y = x - \frac{2\pi}{3}$. Первое уравнение системы примет вид

$$\sin x + \sin\left(x - \frac{2\pi}{3}\right) = 1;$$

$$\sin x + \sin x \cdot \cos \frac{2\pi}{3} - \cos x \cdot \sin \frac{2\pi}{3} = 1;$$

$$\sin x - \frac{1}{2} \sin x - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x = 1;$$

$$\frac{1}{2} \sin x - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x = 1; \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 1;$$

$$x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z. \text{ Отсюда}$$

$$y = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z.$$

2. Если $x - y = -\frac{2\pi}{3}$, то $y = x + \frac{2\pi}{3}$. Первое уравнение системы примет вид

$$\sin x + \sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) = 1;$$

$$\sin x + \sin x \cdot \cos \frac{2\pi}{3} + \cos x \cdot \sin \frac{2\pi}{3} = 1;$$

$$\sin x - \frac{1}{2} \sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x = 1;$$

$$\frac{1}{2} \sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x = 1; \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 1;$$

$$x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z. \text{ Отсюда}$$

$$y = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z.$$

Ответ: $\left(\frac{5\pi}{6} + 2\pi n; \frac{\pi}{6} + 2\pi n\right), n \in Z;$

$$\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{5\pi}{6} + 2\pi k\right), k \in Z.$$

Критерии:

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ.	2
Получен ответ, но решение не верно из-за ошибки в формулах или значениях тригонометрических функций, из-за неверной записи ответа.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

41. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sin x = \sin 2y \\ \cos x = \sin y \\ 0 \leq x \leq \pi \\ 0 \leq y \leq \pi \end{cases}$$

Ответ: $\left(\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{6}\right); \left(0; \frac{\pi}{2}\right).$

42. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x + y = \frac{2\pi}{3} \\ \frac{\sin x}{\sin y} = 2 \end{cases}$$

Ответ: $\left(\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{6} - \pi n\right), n \in Z.$

Задания С 2

РАССТОЯНИЯ И УГЛЫ В ПРОСТРАНСТВЕ

Методы решения задач

1. Поэтапно-вычислительный метод
2. Координатный метод
3. Координатно-векторный метод
4. Векторный метод
5. Метод объемов
6. Метод ключевых задач

Ключевые задачи

1. Координаты точки $M(x; y; z)$, делящей отрезок M_1M_2 между точками $M_1(x_1; y_1; z_1)$ и

$M_2(x_2; y_2; z_2)$ в отношении $M_1M : MM_2 = \lambda$,

определяются формулами $x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}$,

$$y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}.$$

2. Найти угол между диагоналями смежных граней куба.

3. Найти угол между диагональю куба и скрещивающейся с ней диагональю грани.

4. Найти угол между диагональю куба и плоскостью, проведенной через концы трех ребер куба, выходящих из той же вершины, что и диагональ.

5. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ диагональ BD_1 перпендикулярна плоскостям AB_1C и A_1DC_1 и делится ими на три равные части.

6. Отрезки, соединяющие середины противоположных ребер тетраэдра, пересекаются в одной точке и делятся этой точкой пополам.

7. В правильной треугольной пирамиде скрещивающиеся ребра перпендикулярны.

8. Отрезок, соединяющий середины скрещивающихся ребер правильного тетраэдра, является их общим перпендикуляром и имеет длину $\frac{a\sqrt{2}}{2}$, где a – длина ребра.

9. Любое сечение треугольной пирамиды плоскостью, параллельной ее скрещивающимся ребрам, является параллелограммом.

10. Любое сечение правильной треугольной пирамиды плоскостью, параллельной ее скрещивающимся ребрам, есть прямоугольник.

1. Расстояние между двумя точками

Расстояние между точками A и B можно вычислить:

1) как длину отрезка AB , если отрезок AB удастся включить в некоторый треугольник в качестве одной из его сторон;

2) по формуле

$$\rho(A; B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}, \text{ где } A(x_1; y_1; z_1), B(x_2; y_2; z_2);$$

3) по формуле $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{AB^2}$.

Пример 1. В единичном кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ на диагоналях граней AD_1 и D_1B_1 взяты точки E и F так, что $D_1E = \frac{1}{3}AD_1$, $D_1F = \frac{2}{3}D_1B_1$. Найдите длину отрезка EF .

Решение. Длину отрезка EF найдем по теореме косинусов из треугольника D_1EF (рис. 1), в котором $D_1F = \frac{2}{3}\sqrt{2}$, $D_1E = \frac{1}{3}\sqrt{2}$, $\angle FD_1E = \frac{\pi}{3}$ (треугольник AB_1D_1 является равносторонним). Имеем

$$\begin{aligned} EF^2 &= D_1E^2 + D_1F^2 - 2D_1E \cdot D_1F \cdot \cos \frac{\pi}{3} = \\ &= \frac{2}{9} + \frac{8}{9} - 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{3}, \text{ откуда } EF = \frac{\sqrt{6}}{3}. \end{aligned}$$

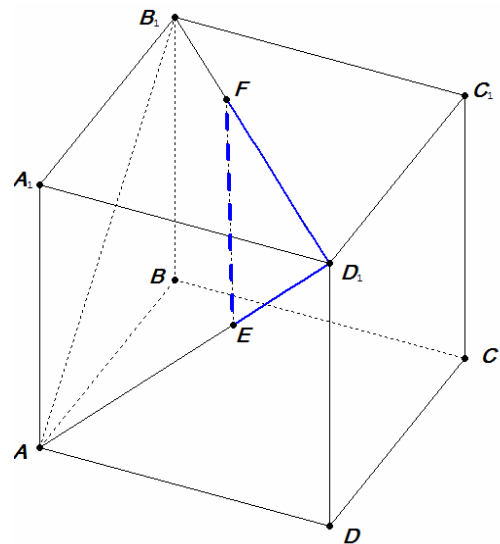


Рис. 1

Ответ: $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

1. (II) Ребра правильной четырехугольной призмы равны 1, 4 и 4. Найдите расстояние от вершины до центра основания призмы, не содержащего эту вершину.

Ответ: 3.

2. Расстояние от точки до прямой

Расстояние от точки до прямой, не содержащей эту точку, есть длина отрезка перпендикуляра, проведенного из этой точки на прямую.

Расстояние между двумя параллельными прямыми равно длине отрезка их общего перпендикуляра.

Расстояние между двумя параллельными прямыми равно расстоянию от любой точки одной из этих прямых до другой прямой.

Расстояние от точки до прямой можно вычислить:

- 1) как длину отрезка перпендикуляра, если удастся включить этот отрезок в некоторый треугольник в качестве одной из высот;
- 2) используя векторный метод;
- 3) используя координатно-векторный метод.

Пример 2. При условиях примера 1 найдите расстояние от точки D_1 до прямой EF .

Решение. Пусть h – длина высоты треугольника D_1EF , опущенной из точки D_1 . Найдем h , используя метод площадей. Площадь треугольника D_1EF равна $\frac{1}{2}D_1F \cdot D_1E \cdot \sin \angle FD_1E =$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{9}.$$

С другой стороны

площадь треугольника D_1EF равна $\frac{1}{2}FE \cdot h = \frac{\sqrt{6}}{6}h$. Из уравнения $\frac{\sqrt{3}}{9} = \frac{\sqrt{6}}{6}h$ находим

искомое расстояние $h = \frac{\sqrt{2}}{3}$.

Замечание. Можно заметить, что выполняется равенство $FE^2 + D_1E^2 = D_1F^2$, то есть треугольник D_1EF прямоугольный и длина отрезка D_1E является искомым расстоянием.

Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

1. (II) В единичном кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ найдите расстояние от точки A до прямой:

- а) $B_1 D_1$; б) $A_1 C$; в) BD_1 .

Ответ: а) $\frac{\sqrt{6}}{2}$; б) $\frac{\sqrt{6}}{3}$; в) $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

2. (II) В правильной треугольной призме $ABCA_1 B_1 C_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки A до прямой BC_1 .

Ответ: $\frac{\sqrt{14}}{4}$.

3. (II) В правильной шестиугольной призме $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки A до прямой:

- а) DE ; б) $D_1 E_1$; в) $B_1 C_1$; г) BE_1 ; д) BC_1 ; е) CE_1 ; ж) CF_1 ; з) CB_1 .

Ответ: а) $\sqrt{3}$; б) 2; в) $\frac{\sqrt{7}}{2}$; г) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$; д) $\frac{\sqrt{14}}{4}$;

е) $\sqrt{2}$; ж) $\frac{\sqrt{30}}{5}$; з) $\frac{\sqrt{30}}{4}$.

4. (II) Основание прямой призмы

$ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – ромб $ABCD$, в котором $AB = 10$, $AC = 6\sqrt{7}$. Боковое ребро AA_1 равно $3\sqrt{21}$. Найдите расстояние от вершины B до прямой AC_1 .

Ответ: 8.

3. Расстояние от точки до плоскости

• Расстояние от точки до плоскости, не содержащей эту точку, есть длина отрезка перпендикуляра, опущенного из этой точки на плоскость.

• Расстояние между прямой и параллельной ей плоскостью равно длине их общего перпендикуляра.

• Расстояние между прямой и параллельной ей плоскостью равно расстоянию от любой точки этой прямой до плоскости.

• Расстояние между двумя параллельными плоскостями равно длине их общего перпендикуляра.

• Расстояние между двумя параллельными плоскостями равно расстоянию между точкой одной из этих плоскостей и другой плоскостью.

Расстояние от точки M до плоскости α

1) равно расстоянию до плоскости α от произвольной точки P , лежащей на прямой l , которая проходит через точку M и параллельна плоскости α ;

2) равно расстоянию до плоскости α от произвольной точки P , лежащей на плоскости β , которая проходит через точку M и параллельна плоскости α ;

3) вычисляется по формуле $\rho = \rho_1 \frac{r}{r_1}$, где

$$\rho = \rho(M; \alpha), \quad \rho_1 = \rho(M_1; \alpha), \quad OM = r, \quad OM_1 = r_1, \quad MM_1 \cap \alpha = O;$$

в частности, $\rho = \rho_1$, если $r = r_1$;

прямая m , проходящая через точку M , пересекает плоскость α в точке O , а точка M_1 лежит на прямой m ;

4) вычисляется по формуле

$$\rho(M; \alpha) = \rho(M; ABC) = \frac{3V_{ABCM}}{S_{ABC}},$$

где треугольник

ABC расположен на плоскости α , а объем пирамиды $ABCM$ равен V_{ABCM} ;

5) вычисляется по формуле

$$\rho(M; \alpha) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \text{ где}$$

$M(x_0; y_0; z_0)$, плоскость α задана уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$;

6) находится с помощью векторного метода;

7) находится с помощью координатно-векторного метода.

Пример 3. В единичном кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ найдите расстояние от точки C_1 до плоскости $AB_1 C$.

Решение. Так как прямая $A_1 C_1$ параллельна AC , то прямая $A_1 C_1$ параллельна плоскости $AB_1 C$ (рис. 2). Поэтому искомое расстояние h равно расстоянию от произвольной точки прямой $A_1 C_1$ до плоскости $AB_1 C$. Например, расстояние от центра O_1 квадрата $A_1 B_1 C_1 D_1$ до плоскости $AB_1 C$ равно h .

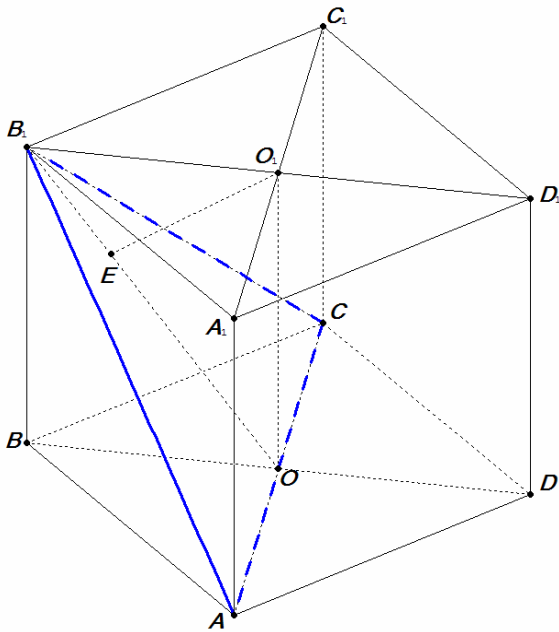


Рис. 2

Пусть E – основание перпендикуляра, опущенного из точки O_1 на прямую $B_1 O$, где O – центр квадрата $ABCD$. Прямая $O_1 E$ лежит в плоскости $BB_1 D_1 D$, а прямая AC перпендикулярна этой плоскости. Поэтому $O_1 E \perp AC$ и $O_1 E$ – перпендикуляр к плоскости $AB_1 C$, а $O_1 E = h$.

Так как $B_1 O_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $O_1 O = 1$, то $OB_1 = \sqrt{\frac{1}{2} + 1} = \sqrt{\frac{3}{2}}$. Выражая двумя способами площадь треугольника $B_1 O_1 O$, получим $h \cdot \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 1$, откуда $h = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

1. Ребро AD пирамиды $DABC$ перпендикулярно плоскости основания ABC . Найдите расстояние от вершины A до плоскости, проходящей через середины ребер AB , AC и AD , если $AD = 2\sqrt{5}$, $AB = AC = 10$, $BC = 4\sqrt{5}$.

Ответ: 2.

4. Расстояние между скрещивающимися прямыми

Расстояние между двумя скрещивающимися прямыми равно длине отрезка их общего перпендикуляра.

Расстояние между скрещивающимися прямыми

- 1) равно расстоянию от любой точки одной из этих прямых до плоскости, проходящей через вторую прямую параллельно первой прямой;
- 2) равно расстоянию между двумя параллельными плоскостями, содержащими эти прямые;
- 3) равно $\rho(a; b) = \rho(A; b_1)$, где $A = a_\alpha$, $b_1 = b_\alpha$: если ортогональная проекция на плоскость α переводит прямую a в точку A , а прямую b в прямую b_1 , то расстояние между скрещивающимися прямыми a и b равно расстоянию от точки A до прямой b_1 ;

4) вычисляется по формуле

$$\rho(AB; CD) = \frac{6V_{ABCD}}{AB \cdot CD \cdot \sin \varphi} \text{ где } A \text{ и } B \text{ – точки}$$

на одной прямой, C и D – точки на другой прямой, φ – угол между данными прямыми;

- 5) определяется с помощью векторного метода;
- 6) определяется с помощью координатно-векторного метода.

Пример 4. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми BD и SA .

Решение. Пусть E – основание перпендикуляра (рис. 3), опущенного из точки O на ребро SA . Так как прямая BD перпендикулярна плоскости AOS , то $BD \perp OE$.

Таким образом, OE – общий перпендикуляр к скрещивающимся прямым BD и SA .

Найдем его длину, вычислив двумя способами площадь треугольника AOS .

Из равенства $AO \cdot SO = AS \cdot OE$, где $AO = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $AS = 1$, $SO = \frac{\sqrt{2}}{2}$ следует, что $OE = \frac{1}{2}$.

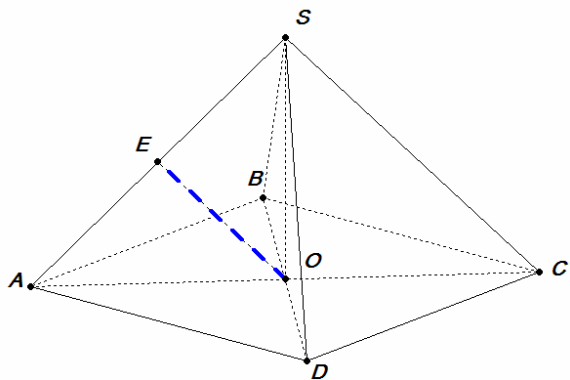


Рис. 3

Ответ: 0,5.

1. В пирамиде $DABC$ известны длины ребер: $AB = AC = DB = DC = 10$, $BC = DA = 12$. Найдите расстояние между прямыми DA и BC .

Ответ: $2\sqrt{7}$.

5. Угол между двумя прямыми

- Углом между двумя пересекающимися прямыми называется наименьший из углов, образованных при пересечении прямых.
- $0^\circ < \angle(a; b) \leq 90^\circ$.
- Углом между скрещивающимися прямыми называется угол между пересекающимися прямыми, соответственно параллельными данным скрещивающимся.
- Две прямые называются перпендикулярными, если угол между ними равен 90° .
- Угол между параллельными прямыми считается равным нулю.

• При нахождении угла между прямыми используют:

1) формулу $\cos \varphi = \frac{|b^2 + c^2 - a^2|}{2bc}$ для нахождения угла φ между прямыми m и l , если стороны a и b треугольника ABC соответственно параллельны этим прямым;

2) формулу $\cos \varphi = \frac{|\vec{p} \cdot \vec{q}|}{|\vec{p}| \cdot |\vec{q}|}$ или в координатной

форме

$\cos \varphi = \frac{|x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$ для на-

хождения угла φ между прямыми m и l , если векторы $\vec{p}(x_1; y_1; z_1)$ и $\vec{q}(x_2; y_2; z_2)$ параллельны соответственно этим прямым; в частности, для того чтобы прямые m и l были перпендикулярны, необходимо и достаточно, чтобы $\vec{p} \cdot \vec{q} = 0$ или $x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0$;

3) ключевые задачи.

Пример 5. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ найдите угол между прямыми $A_1 D$ и $D_1 E$, где E – середина ребра CC_1 .

Решение. Пусть F – середина ребра BB_1 , α – ребро куба, φ – искомый угол.

Так как $A_1 F \parallel D_1 E$, то φ – угол при вершине A_1 в треугольнике $A_1 F D$.

Из треугольника BFD имеем

$$FD^2 = BD^2 + BF^2 = 2a^2 + \frac{a^2}{4} = \frac{9a^2}{4},$$

а из треугольника $A_1 B_1 F$ получаем

$$A_1 F^2 = A_1 B_1^2 + B_1 F^2 = a^2 + \frac{a^2}{4} = \frac{5a^2}{4},$$

$$A_1 F = \frac{a\sqrt{5}}{2}.$$

Далее в треугольнике $A_1 F D$ используем теорему косинусов

$$FD^2 = A_1 D^2 + A_1 F^2 - 2A_1 D \cdot A_1 F \cos \varphi,$$

$$\frac{9a^2}{4} = 2a^2 + \frac{5a^2}{4} - 2a\sqrt{2} \cdot \frac{a\sqrt{5}}{2} \cos \varphi,$$

$$\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{10}} \text{ и } \varphi = \arccos \frac{1}{\sqrt{10}}.$$

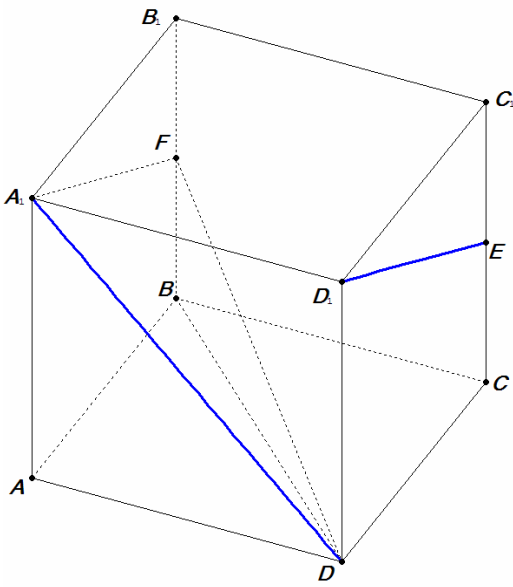


Рис. 4

Ответ: $\arccos \frac{1}{\sqrt{10}}$.

1. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ точки E, F – середины ребер соответственно $A_1 B_1$ и $B_1 C_1$. Найдите косинус угла между прямыми AE и BF .

Ответ: 0,8.

2. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ точки E, F – середины ребер соответственно $A_1 B_1$ и $C_1 D_1$. Найдите косинус угла между прямыми AE и BF .

Ответ: $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

3. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ точка E – середина ребра $A_1 B_1$. Найдите косинус угла между прямыми AE и BD_1 .

Ответ: $\frac{\sqrt{15}}{5}$.

4. К диагонали куба провели перпендикуляры из остальных вершин куба. На сколько частей и в каком отношении основания этих перпендикуляров разделили диагональ?

Ответ: на три части в отношении 1:1:1.

5. К диагонали $A_1 C$ куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ провели перпендикуляры из середин ребер AB и AD . Найдите угол между этими перпендикулярами.

Ответ: 60° .

6. К диагонали $A_1 C$ куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ провели перпендикуляры из вершин A и B . Найдите угол между этими перпендикулярами.

Ответ: 60° .

7. В правильной треугольной призме $ABCA_1 B_1 C_1$, все ребра которой равны 1, найдите косинус угла между прямыми AB и $A_1 C$.

Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{4}$.

8. В правильной треугольной призме $ABCA_1 B_1 C_1$, все ребра которой равны 1, найдите косинус угла между прямыми AB_1 и BC_1 .

Ответ: $\frac{1}{4}$.

9. Непересекающиеся диагонали двух смежных боковых граней прямоугольного параллелепипеда образуют с плоскостью его основания углы φ и ψ . Найдите угол между этими диагоналями.

Ответ: $\arccos(\sin \varphi \cdot \sin \psi)$

10. В правильной треугольной призме $ABCA_1 B_1 C_1$, все ребра которой равны 1, точки D, E – середины ребер соответственно $A_1 B_1$ и $B_1 C_1$. Найдите косинус угла между прямыми AD и BE .

Ответ: 0,7.

11. В правильной треугольной призме $ABCA_1 B_1 C_1$, все ребра которой равны 1, точка D – середина ребра $A_1 B_1$. Найдите косинус угла между прямыми AD и BC_1 .

Ответ: $\frac{3\sqrt{10}}{20}$.

12. В правильной шестиугольной призме $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$, все ребра которой равны 1, найдите косинус угла между прямыми AB_1 и BC_1 .

Ответ: 0,75.

13. В правильной шестиугольной призме $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$, все ребра которой равны 1, найдите косинус угла между прямыми AB_1 и BD_1 .

Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{4}$.

14. В правильной шестиугольной призме $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$, все ребра которой равны 1, найдите косинус угла между прямыми AB_1 и BE_1 .

Ответ: 90° .

15. В правильной шестиугольной призме $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$, все ребра которой равны 1, точки G, H – середины ребер соответственно $A_1 B_1$ и $B_1 C_1$. Найдите косинус угла между прямыми AG и BH .

Ответ: 0,9.

16. В правильной шестиугольной призме $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$, все ребра которой равны 1, точка G – середина ребра $A_1 B_1$. Найдите косинус угла между прямыми AG и BC_1 .

Ответ: $\frac{\sqrt{10}}{4}$.

17. В правильной шестиугольной призме $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$, все ребра которой равны 1, точка G – середина ребра $A_1 B_1$. Найдите косинус угла между прямыми AG и BD_1 .

Ответ: $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

18. Найдите угол между непересекающимися медианами граней правильного тетраэдра.

Ответ: $\arccos \frac{1}{6}$; $\arccos \frac{2}{3}$.

19. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны 1, точки E, F – середины ребер соответственно SB и SC . Найдите косинус угла между прямыми AE и BF .

Ответ: $\frac{1}{6}$.

20. Ребра AD и BC пирамиды $DABC$ равны 24 см и 10 см. Расстояние между серединами ребер BD и AC равно 13 см. Найдите угол между прямыми AD и BC .

Ответ: 90° .

6. Угол между прямой и плоскостью

• Углом между плоскостью и не перпендикулярной ей прямой называется угол между этой прямой и ее проекцией на данную плоскость.

• $0^\circ < \angle(a; \alpha) < 90^\circ$.

• Угол между взаимно перпендикулярными прямой и плоскостью равен 90° .

• Если прямая параллельна плоскости (или лежит в ней), то угол между ними считается равным 0° .

Угол между прямой l и плоскостью α можно вычислить:

1) если этот угол удается включить в прямоугольный треугольник в качестве одного из острых углов;

2) по формуле $\sin \varphi = \sin \angle(l; \alpha) = \frac{\rho(M; \alpha)}{AM}$, где

$M \in l, l \cap \alpha = A$;

3) по формуле $\sin \varphi = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{p}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{p}|}$ или в координатной форме

$\sin \varphi = \frac{|x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$, где

$\vec{n}(x_1; y_1; z_1)$ - вектор нормали плоскости α ,

$\vec{p}(x_2; y_2; z_2)$ - направляющий вектор прямой l ;

• прямая l и плоскость α параллельны тогда и только тогда, когда $x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = 0$;

4) используя векторный метод;

5) используя координатно-векторный метод;

6) используя ключевые задачи.

Пример 6. В правильной треугольной призме $ABCA_1 B_1 C_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямой AB_1 и плоскостью $AA_1 C_1 C$.

Решение. Пусть D – середина $A_1 C_1$, тогда $B_1 D$ - перпендикуляр к плоскости $AA_1 C_1 C$, а D – проекция точки B_1 на эту плоскость (рис. 5).

Если φ - искомый угол, то $\sin \varphi = \frac{B_1 D}{AB_1}$, где

$AB_1 = \sqrt{2}$, $B_1 D = \frac{\sqrt{3}}{2}$, и поэтому $\sin \varphi = \frac{\sqrt{6}}{4}$,

$\varphi = \arcsin \frac{\sqrt{6}}{4}$.

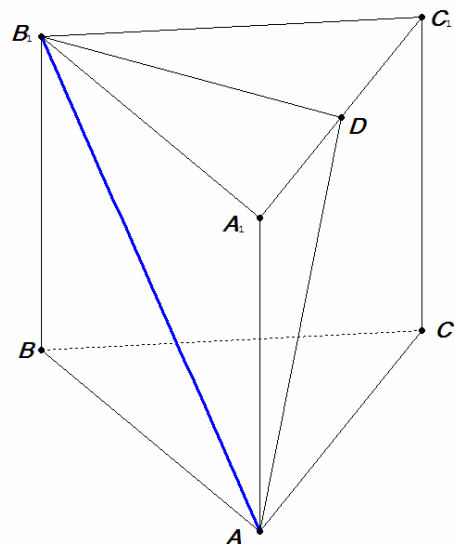


Рис. 5

Ответ: $\arcsin \frac{\sqrt{6}}{4}$.

1. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ найдите угол между прямой AB_1 и плоскостью ABC_1 .

Ответ: 30° .

2. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ найдите тангенс угла между прямой AA_1 и плоскостью $BC_1 D_1$.

Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

3. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ найдите тангенс угла между прямой AC_1 и плоскостью BCC_1 .

Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

4. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ точка E – середина ребра $A_1 B_1$. Найдите синус угла между прямой AE и плоскостью BDD_1 .

Ответ: $\frac{\sqrt{10}}{10}$.

5. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ точка E – середина ребра $A_1 B_1$. Найдите синус угла между прямой AE и плоскостью BDC_1 .

Ответ: $\frac{\sqrt{15}}{15}$.

6. В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ найдите угол между плоскостью $AA_1 C$ и прямой $A_1 B$, если $AA_1 = 3$, $AB = 4$, $BC = 4$.

Ответ: $\arcsin \frac{2\sqrt{2}}{5}$.

7. В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ найдите угол между плоскостью $A_1 BC$ и прямой BC_1 , если $AA_1 = 8$, $AB = 6$, $BC = 15$.

Ответ: $\arcsin \frac{24}{85}$.

8. В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, у которого $AA_1 = 4$, $A_1 D_1 = 6$, $C_1 D_1 = 6$ найдите тангенс угла между плоскостью ADD_1 и прямой EF , проходящей через середины ребер AB и $B_1 C_1$.

Ответ: $\frac{3}{5}$.

9. В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, у которого $AB = 4$, $BC = 6$, $CC_1 = 4$ найдите тангенс угла между плоскостью ABC и прямой EF , проходящей через середины ребер AA_1 и $C_1 D_1$.

Ответ: $\frac{1}{\sqrt{10}}$.

10. В правильной треугольной призме $ABCA_1 B_1 C_1$, все ребра которой равны 1, точка D – середина ребра $A_1 B_1$. Найдите синус угла между прямой AD и плоскостью BCC_1 .

Ответ: $\frac{\sqrt{15}}{10}$.

11. В основании прямой призмы $MNKM_1 N_1 K_1$ лежит прямоугольный треугольник MNK , у которого угол N равен 90° , угол M равен 60° , $NK = 18$. Диагональ боковой грани $M_1 N$ составляет угол 30° с плоскостью $MM_1 K_1$. Найдите высоту призмы.

Ответ: $6\sqrt{6}$.

12. В основании прямой призмы $ABCA_1 B_1 C_1$ лежит прямоугольный треугольник ABC , у которого угол C равен 90° , угол A равен 30° , $AC = 10\sqrt{3}$. Диагональ боковой грани $B_1 C$ составляет угол 30° с плоскостью $AA_1 B_1$. Найдите высоту призмы.

Ответ: $10\sqrt{2}$.

Критерии:

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ.	2
Способ нахождения искомой величины верен, но получен неверный ответ или решение не закончено.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

13. В правильной шестиугольной призме $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$, все ребра которой равны 1, точка G – середина ребра $A_1 B_1$. Найдите синус угла между прямой AG и BCC_1 .

Ответ: $\frac{\sqrt{15}}{10}$.

14. В правильной шестиугольной призме $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$, все ребра которой равны 1, точка G – середина ребра $A_1 B_1$. Найдите синус угла между прямой AG и BDD_1 .

Ответ: $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

15. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны 1, найдите ко-

синус угла между прямой AB и плоскостью SAD .

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

16. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$, боковые ребра которой равны 2, а стороны основания – 1, найдите косинус угла между прямой AC и плоскостью SAF .

Ответ: $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

7. Угол между плоскостями

- Двугранный угол, образованный полуплоскостями измеряется величиной его линейного угла, получаемого при пересечении двугранного угла плоскостью, перпендикулярной его ребру.
- Величина двугранного угла принадлежит промежутку $(0^\circ; 180^\circ)$.
- Величина угла между пересекающимися плоскостями принадлежит промежутку $(0^\circ; 90^\circ]$.
- Угол между двумя параллельными плоскостями считается равным 0° .

Угол между пересекающимися плоскостями можно вычислить:

1) как угол между прямыми, лежащими в этих плоскостях и перпендикулярными к линии их пересечения;

2) как угол треугольника, если удастся включить линейный угол в некоторый треугольник;

3) по формуле $\sin \angle(\alpha; \beta) = \frac{\rho(M; \beta)}{\rho(M; l)}$, где

$$M \in \alpha; \quad \alpha \cap \beta = l;$$

4) по формуле $\cos \angle(\alpha; \beta) = \frac{S'}{S}$, где S – площадь

фигуры Φ , расположенной в плоскости α , S' – площадь проекции фигуры Φ на плоскость β ;

5) как угол между перпендикулярными им прямыми;

6) по формуле $\cos \angle(\alpha; \beta) = \frac{|\overline{n_1} \cdot \overline{n_2}|}{|\overline{n_1}| \cdot |\overline{n_2}|}$ или в коор-

динатной форме $\cos \angle(\alpha; \beta) =$

$$= \frac{|A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}, \quad \text{где}$$

$\overline{n_1}(A_1; B_1; C_1)$ – вектор нормали плоскости

$A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0$, $\overline{n_2}(A_2; B_2; C_2)$ – вектор нормали плоскости $A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0$;

7) используя ключевые задачи.

Пример 7. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны 1, найдите двугранный угол между основанием и боковой гранью.

Решение. Пусть E и K – середины ребер AD и BC соответственно, O – центр основания $ABCD$ (рис. 6). Тогда $SE \perp AD$, $EK \perp AD$ и поэтому $\angle SEK = \varphi$ – линейный угол данного двугранного угла.

Так как $AD = 1$, $OE = \frac{1}{2}$, $SD = 1$, то

$$SE = \sqrt{SD^2 - ED^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\cos \varphi = \frac{OE}{SE} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \varphi = \arccos \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

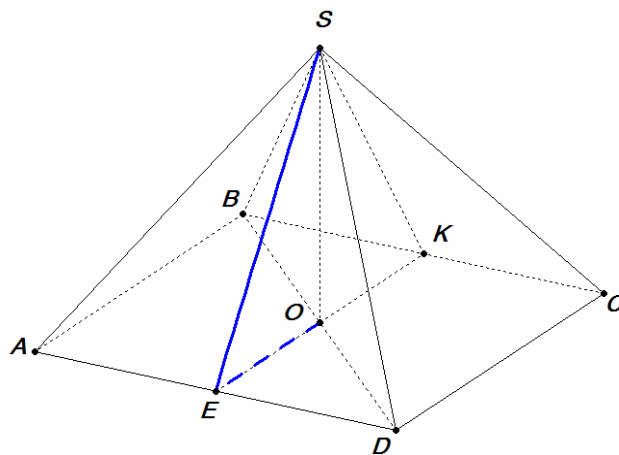


Рис. 6

Ответ: $\arccos \frac{1}{\sqrt{3}}$.

1. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Найдите угол между плоскостями $AB_1 C_1$ и $A_1 B_1 C$.

Ответ: $\frac{\pi}{3}$.

2. Диагональ $A_1 C$ куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ служит ребром двугранного угла, грани которого проходят через середины ребер AB и DD_1 . Найдите величину этого угла.

Ответ: 120° .

3. Диагональ $A' C$ куба $ABCD A' B' C' D'$ служит ребром двугранного угла, грани которого проходят через B и D . Найдите величину этого угла.

Ответ: 120° .

4. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ точки E, F – середины ребер соответственно $A_1 B_1$ и $A_1 D_1$. Найдите тангенс угла между плоскостями AEF и BCC_1 .

Ответ: $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

5. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ точки E, F – середины ребер соответственно $A_1 B_1$ и $A_1 D_1$. Найдите тангенс угла между плоскостями AEF и BDD_1 .

Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{4}$.

6. В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ известны длины ребер: $AA_1 = 5$, $AB = 12$, $AD = 8$. Найдите тангенс угла между плоскостью ABC и плоскостью, проходящей через точку B перпендикулярно прямой AK , если K – середина ребра $C_1 D_1$.

Ответ: 2.

7. В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, у которого $AB = 4$, $BC = 6$, $CC_1 = 4$ найдите тангенс угла между плоскостями CDD_1 и BDA_1 .

Ответ: $\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

8. В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, у которого $AB = 6$, $BC = 6$, $CC_1 = 4$ найдите тангенс угла между плоскостями ACD_1 и $A_1 B_1 C_1$.

Ответ: $\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

9. Основание прямой четырехугольной призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – прямоугольник $ABCD$, в котором $AB = 5$, $AD = \sqrt{33}$. Найдите тангенс угла между плоскостью грани $AA_1 D_1 D$ призмы и плоскостью, проходящей через середину ребра CD перпендикулярно прямой $B_1 D$, если расстояние между прямыми $A_1 C_1$ и BD равно $\sqrt{3}$.

Ответ: 1,2.

10. Основание прямой четырехугольной призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – прямоугольник $ABCD$, в котором $AB = 12$, $AD = \sqrt{31}$. Найдите тангенс угла между плоскостью основания призмы и плоскостью, проходящей через середину ребра AD перпендикулярно прямой BD_1 , если расстояние между прямыми AC и $B_1 D_1$ равно 5.

Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{4}$.

11. Сторона основания правильной треугольной призмы $ABCA_1 B_1 C_1$ равна 2, а диагональ боковой грани равна $\sqrt{5}$. Найдите угол между плоскостью $A_1 BC$ и плоскостью основания призмы.

Ответ: 30° .

12. В правильной треугольной призме $ABCA_1 B_1 C_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между плоскостями ACB_1 и $A_1 C_1 B$.

Ответ: $\arccos \frac{1}{7}$.

13. (Демо 2010) Сторона основания правильной треугольной призмы $ABCA_1 B_1 C_1$ равна 2, а диагональ боковой грани равна $\sqrt{5}$. Найдите угол между плоскостью $A_1 BC$ и плоскостью основания призмы.

Ответ: 30° .

14. В правильной треугольной призме $ABCA_1 B_1 C_1$, все ребра которой равны 1, точки D, E – середины ребер соответственно $A_1 B_1$ и $A_1 C_1$. Найдите тангенс угла между плоскостями ADE и BCC_1 .

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

15. Основанием прямой треугольной призмы $ABCA_1 B_1 C_1$ является равнобедренный треугольник ABC , в котором $AB = BC = 10$, $AC = 16$. Боковое ребро призмы равно 24. Точка P – середина ребра BB_1 . Найдите тангенс угла между плоскостями $A_1 B_1 C_1$ и ACP .

Ответ: 2.

16. Основанием прямой треугольной призмы $ABCA_1 B_1 C_1$ является равнобедренный треугольник ABC , в котором $AB = BC = 20$, $AC = 32$. Боковое ребро призмы равно 24. Точка P принадлежит ребра BB_1 , причем $BP : PB_1 = 1 : 3$. Найдите тангенс угла между плоскостями $A_1 B_1 C_1$ и ACP .

Ответ: 0,5.

17. Основанием прямой треугольной призмы $ABCA_1 B_1 C_1$ является треугольник ABC , в котором $AB = AC = 8$, а один из углов равен 60° . На ребре AA_1 отмечена точка P так, что $AP : PA_1 = 2 : 1$. Найдите тангенс угла между плоскостями ABC и CBP , если расстояние между прямыми AB и $C_1 B_1$ равно $18\sqrt{3}$.

Ответ: 3.

18. Основанием прямой треугольной

призмы $ABCA_1B_1C_1$ является треугольник ABC , в котором $AC = BC = 6$, а один из углов равен 60° . На ребре CC_1 отмечена точка P так, что $CP : PC_1 = 2 : 1$. Найдите тангенс угла между плоскостями ABC и ABP , если расстояние между прямыми AC и A_1B_1 равно $18\sqrt{3}$.

Ответ: 4.

19. Основанием прямой призмы

$ABCA_1B_1C_1$ является прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой AC . Найдите тангенс угла между плоскостью $A_1B_1C_1$ и плоскостью, проходящей через середину ребра AA_1 и прямую BC , если $AB = 4$, $BB_1 = 12$.

Ответ: 1,5.

20. Основание пирамиды $DABC$ - равнобедренный треугольник ABC , в котором $AB = BC = 13$, $AC = 24$. Ребро DB перпендикулярно плоскости основания и равно 20. Найдите тангенс двугранного угла при ребре AC .

Ответ: 4.

21. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны 1, найдите косинус угла между плоскостями ABC и BCS .

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

22. Диаметр окружности основания цилиндра равен 20, образующая цилиндра равна 28. Плоскость пересекает его основания по хордам длины 12 и 16. Найдите тангенс угла между этой плоскостью и плоскостью основания цилиндра.

Ответ: 2 или 14.

23. Диаметр окружности основания цилиндра равен 26, образующая цилиндра равна 21. Плоскость пересекает его основания по хордам длины 24 и 10. Найдите тангенс угла между этой плоскостью и плоскостью основания цилиндра.

Ответ: 3 или $\frac{21}{17}$.

8. Разные задачи

1. Найдите радиус сферы, внутри которой расположены четыре шара радиуса r . Каждый из этих шаров касается трех других и поверхности сферы.

Ответ: $r\left(1 + \frac{\sqrt{6}}{2}\right)$.

2. Три сферы, попарно касаясь друг друга, касаются плоскости треугольника в его вершинах. Найдите радиусы сфер, если

стороны треугольника равны a , b и c .

Ответ: $\frac{ab}{2c}$; $\frac{bc}{2a}$; $\frac{ac}{2b}$.

3. Плоскость пересекает боковые ребра SA , SB и SC треугольной пирамиды $SABC$ в точках K , L и M соответственно. В каком отношении делит эта плоскость объем пирамиды, если известно, что $\frac{SK}{KA} = \frac{SL}{LB} = 2$, а медиану SN треугольника SBC эта плоскость делит пополам.

Ответ: $\frac{8}{37}$.

4. Найти угол при вершине в осевом сечении конуса, если на его поверхности можно провести три попарно перпендикулярные образующие.

Ответ: $\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)$.

5. Какие значения принимает угол между образующими конуса, если его образующая в два раза больше радиуса основания?

Ответ: $(0^\circ; 60^\circ]$.

9. Координатный метод

Пример 8. В единичном кубе $ABCA_1B_1C_1D_1$ точки E и K - середины ребер AA_1 и CD соответственно, а точка M расположена на диагонали B_1D_1 так, что $B_1M = 2MD_1$. Найдите расстояние между точками Q и L , где Q - середина отрезка EM , а L - точка отрезка MK такая, что $ML = 2LK$.

Решение. Введем прямоугольную систему координат, как указано на рисунке 7. Тогда

$E\left(0; 0; \frac{1}{2}\right)$, $K\left(1; \frac{1}{2}; 0\right)$, $B_1(0; 1; 1)$, $D_1(1; 0; 1)$. Для

нахождения координат точки M используем формулу координат точки, делящей отрезок B_1D_1 в отношении 2:1. Имеем

$M\left(\frac{0+2\cdot 1}{1+2}; \frac{1+2\cdot 0}{1+2}; \frac{1+2\cdot 1}{1+2}\right) = \left(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}; 1\right)$. Анало-

гично получим координаты точки L , делящей отрезок MK в отношении 2:1. Имеем

$L\left(\frac{\frac{2}{3}+2\cdot 1}{1+2}; \frac{\frac{1}{3}+2\cdot \frac{1}{2}}{1+2}; \frac{1+2\cdot 0}{1+2}\right) = \left(\frac{8}{9}; \frac{4}{9}; \frac{1}{3}\right)$ Коор-

динаты точки Q равны полусуммам соответствующих координат точек E и M , поэтому

$Q\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{6}; \frac{3}{4}\right)$. Применим формулу для расстояния

между точками с заданными координатами

$$QL = \sqrt{\left(\frac{1}{3} - \frac{8}{9}\right)^2 + \left(\frac{1}{6} - \frac{4}{9}\right)^2 + \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{3}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{725}{36^2}} = \frac{5\sqrt{29}}{36}.$$

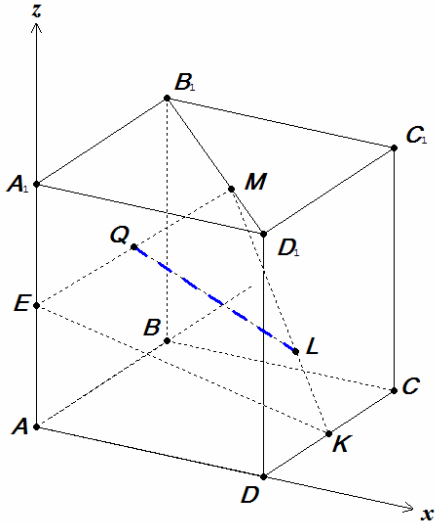


Рис. 7

Ответ: $\frac{5\sqrt{29}}{36}$.

Пример 9. В единичном кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ найдите расстояние от точки A_1 до плоскости BDC_1 .

Решение. Составим уравнение плоскости, проходящей через точки $B(0;1;0)$, $D(1;0;0)$ и $C_1(1;1;1)$. Для этого подставим координаты этих точек в общее уравнение плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$. Получим систему уравнений

$$\begin{cases} B + D = 0 \\ A + D = 0 \\ A + B + C + D = 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} B = -D \\ A = -D \\ C = D \end{cases} \quad \text{Отсюда нахо-}$$

дим уравнение $-Dx - Dy + Dz + D = 0$ или $x + y - z - 1 = 0$. По формуле находим расстояние от точки $A_1(0;0;1)$ до плоскости $\beta = BDC_1$:

$$\rho(A_1; \beta) = \frac{|0 + 0 - 1 - 1|}{\sqrt{1+1+1}} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

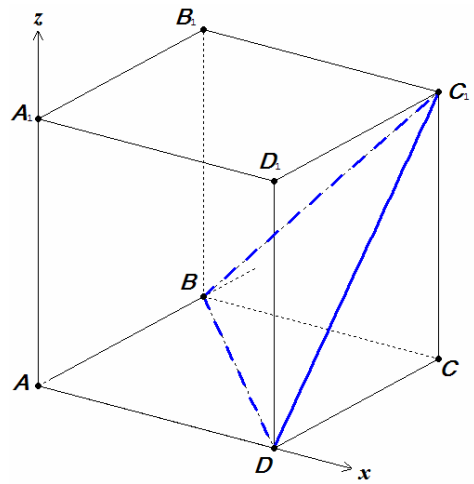


Рис. 8

Ответ: $\frac{2}{\sqrt{3}}$.

10. Координатно-векторный метод

Пример 10. В единичном кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ найдите расстояние между диагональю куба BD_1 и диагональю грани AB_1 .

Решение. Введем прямоугольную систему координат (рис. 9), тогда

$$A(0;0;0), B(0;1;0), B_1(0;1;1), D_1(1;0;1).$$

Пусть EF – общий перпендикуляр скрещивающихся прямых BD_1 и AB_1 , то есть $EF \perp AB_1$, $EF \perp BD_1$, причем $E \in AB_1$ и $F \in BD_1$. Обозначим $\lambda = \frac{AE}{B_1E}$, $\mu = \frac{BF}{D_1F}$ и воспользуемся фор-

мулами для координат точки, которая делит данный отрезок в заданном отношении. Получим $E\left(0; \frac{\lambda}{1+\lambda}; \frac{\lambda}{1+\lambda}\right)$, $F\left(\frac{\mu}{1+\mu}; \frac{1}{1+\mu}; \frac{\mu}{1+\mu}\right)$.

Пусть $\frac{\lambda}{1+\lambda} = p$, $\frac{\mu}{1+\mu} = q$, тогда $E(0; p; p)$,

$F(q; 1-q; q)$. Так как вектор

$\overline{EF} = (q; 1-q-p; q-p)$ должен быть перпендикулярным векторам $\overline{AB_1} = (0;1;1)$ и

$\overline{BD_1} = (1; -1; 1)$, то имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} \overline{AB_1} \cdot \overline{EF} = 0 \\ \overline{BD_1} \cdot \overline{EF} = 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 1 - q - p + q - p = 0 \\ q - 1 + q + p + q - p = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} p = \frac{1}{2} \\ q = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\text{Отсюда } \overline{EF} = \left(\frac{1}{3}; \frac{1}{6}; -\frac{1}{6} \right),$$

$$EF = |\overline{EF}| = \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36}} = \frac{1}{\sqrt{6}}.$$

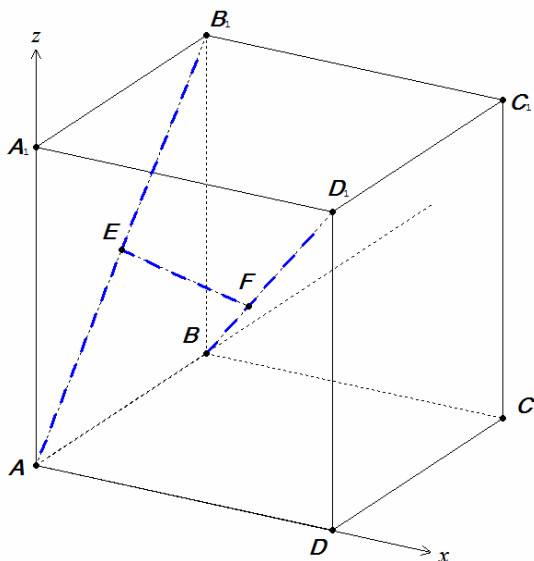


Рис. 9

$$\text{Ответ: } \frac{1}{\sqrt{6}}.$$

Пример 11. В единичном кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ найдите угол между прямыми AE и DF , где E и F – точки, расположенные на ребрах CD и $C_1 D_1$ так, что $DE = \frac{1}{3} DC$, $C_1 F = \frac{1}{3} C_1 D_1$.

Решение. Введем прямоугольную систему координат, как указано на рисунке 10. Тогда

$$A(0;0;0), D(1;0;0), E\left(1; \frac{1}{3}; 0\right), F\left(1; \frac{2}{3}; 1\right),$$

$$\overline{AE} = \left(1; \frac{1}{3}; 0\right), \overline{DF} = \left(0; \frac{2}{3}; 1\right),$$

$$\cos \alpha = \frac{|\overline{AE} \cdot \overline{DF}|}{|\overline{AE}| \cdot |\overline{DF}|} = \frac{\frac{2}{9}}{\frac{\sqrt{10}}{3} \cdot \frac{\sqrt{13}}{3}} = \frac{2}{\sqrt{130}},$$

$$\alpha = \arccos \frac{2}{\sqrt{130}}, \text{ где } \alpha - \text{искомый угол.}$$

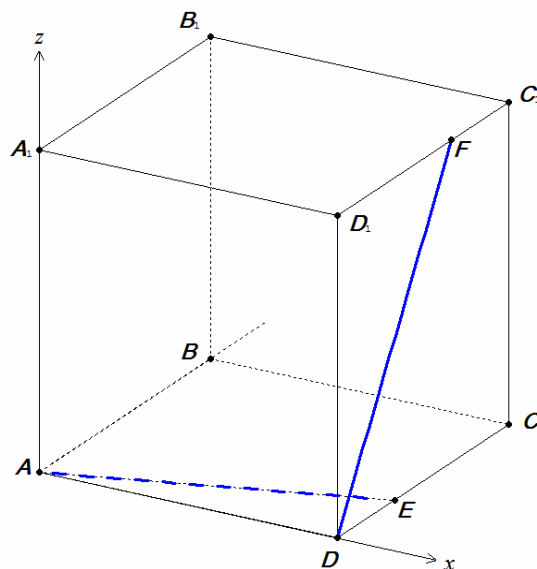


Рис. 10

$$\text{Ответ: } \arccos \frac{2}{\sqrt{130}}.$$

Пример 12. В единичном кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ найдите угол между прямой AD_1

и плоскостью α , проходящей через точки A_1 , E и F , где точка E – середина ребра $C_1 D_1$, а точка F лежит на ребре DD_1 , так, что $D_1 F = 2 DF$.

Решение. Введем прямоугольную систему координат, как указано на рисунке 11. Тогда

$$A(0;0;0), A_1(0;0;1), D_1(1;0;1), E\left(1; \frac{1}{2}; 1\right),$$

$$F\left(1; 0; \frac{1}{3}\right), \overline{AD_1} = (1; 0; 1), \overline{A_1 E} = \left(1; \frac{1}{2}; 0\right),$$

$$\overline{A_1 F} = \left(1; 0; -\frac{2}{3}\right). \text{ Пусть } \vec{n} = (x; y; z) - \text{вектор,}$$

перпендикулярный плоскости α , φ – искомый

$$\text{угол. Тогда } \sin \varphi = \frac{|\overline{AD_1} \cdot \vec{n}|}{|\overline{AD_1}| \cdot |\vec{n}|}.$$

Вектор \vec{n} найдем из условий перпендикулярности этого вектора векторам

$\overline{A_1 E}$ и $\overline{A_1 F}$, т.е. из условий

$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \overline{A_1 E} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overline{A_1 F} = 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x + \frac{y}{2} = 0 \\ x - \frac{2}{3}z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2x \\ z = 1,5x. \end{cases} \text{ Пусть}$$

$$x = 2, \text{ тогда } y = -4, z = 3 \text{ и } \vec{n} = (2; -4; 3),$$

$$|\vec{n}| = \sqrt{29}.$$

Так как $\overline{AD_1} \cdot \bar{n} = 1 \cdot 2 + 0 \cdot (-4) + 1 \cdot 3 = 5$,
 $|\overline{AD_1}| = \sqrt{2}$, то $\sin \varphi = \frac{5}{\sqrt{58}}$.

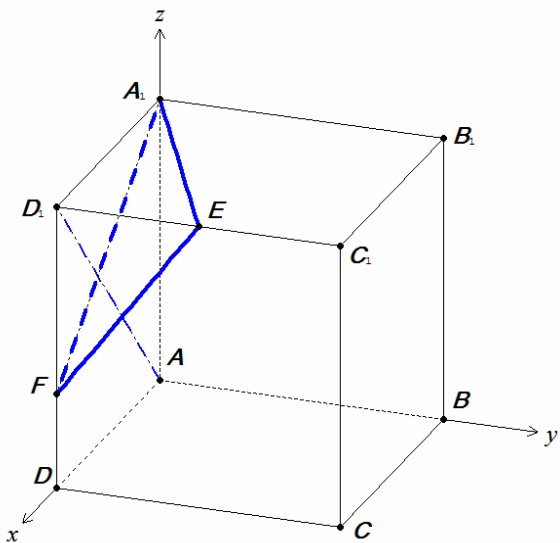


Рис. 11

Ответ: $\arcsin \frac{5}{\sqrt{58}}$.

Пример 13. Найдите угол между плоскостями $2x + 3y + 6z - 5 = 0$ и $4x + 4y + 2z - 7 = 0$.

Решение. Рассмотрим векторы $\bar{n} = (2; 3; 6)$ и $\bar{m} = (4; 4; 2)$, перпендикулярные к данным плоскостям. Искомый угол найдем по формуле

$$\cos \varphi = \frac{|\bar{n} \cdot \bar{m}|}{|\bar{n}| \cdot |\bar{m}|}.$$

Так как $\bar{n} \cdot \bar{m} = 2 \cdot 4 + 3 \cdot 4 + 6 \cdot 2 = 32$,
 $|\bar{n}| = \sqrt{4 + 9 + 36} = 7$, $|\bar{m}| = \sqrt{16 + 16 + 4} = 6$, то

$$\cos \varphi = \frac{16}{21}, \text{ откуда } \arccos \varphi = \frac{16}{21}.$$

Ответ: $\arccos \frac{16}{21}$.

Пример 14. В единичном кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ найдите угол между плоскостями $AD_1 E$ и $D_1 F C$, где точки E и F – середины ребер $A_1 B_1$ и $B_1 C_1$ соответственно.

Решение. Введем прямоугольную систему координат, как указано на рисунке 12. Тогда

$$A(0; 0; 0), C(1; 1; 0), D_1(1; 0; 1), E\left(0; \frac{1}{2}; 1\right),$$

$$F\left(\frac{1}{2}; 1; 1\right), \overline{AD_1} = (1; 0; 1), \overline{AE} = \left(0; \frac{1}{2}; 1\right),$$

$$\overline{CD_1} = (0; -1; 1), \overline{CF} = \left(-\frac{1}{2}; 0; 1\right).$$

Найдем вектор $\bar{n} = (x; y; z)$, перпендикулярный плоскости $AD_1 E$. Этот вектор должен быть перпендикулярным векторам \overline{AE} и $\overline{AD_1}$ и поэтому

$$\begin{cases} \bar{n} \cdot \overline{AE} = 0 \\ \bar{n} \cdot \overline{AD_1} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{y}{2} + z = 0 \\ x + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2z \\ x = -z. \end{cases}$$

Пусть $z = -1$, тогда $x = 1$, $y = 2$ и $\bar{n} = (1; 2; -1)$.

Найдем вектор $\bar{m} = (x; y; z)$, перпендикулярный плоскости $D_1 F C$. Этот вектор должен быть перпендикулярным векторам $\overline{CD_1}$ и \overline{CF} и поэтому

$$\begin{cases} \bar{m} \cdot \overline{CD_1} = 0 \\ \bar{m} \cdot \overline{CF} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -y + z = 0 \\ -\frac{x}{2} + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = z \\ x = 2z. \end{cases}$$

Пусть $z = 1$, тогда $x = 2$, $y = 1$ и $\bar{m} = (2; 1; 1)$.

Для нахождения искомого угла φ используем

формулу $\cos \varphi = \frac{|\bar{n} \cdot \bar{m}|}{|\bar{n}| \cdot |\bar{m}|}$. Так как

$$\bar{n} \cdot \bar{m} = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 = 3, |\bar{n}| = \sqrt{6}, |\bar{m}| = \sqrt{6},$$

то $\cos \varphi = \frac{1}{2}$, откуда $\varphi = 60^\circ$.

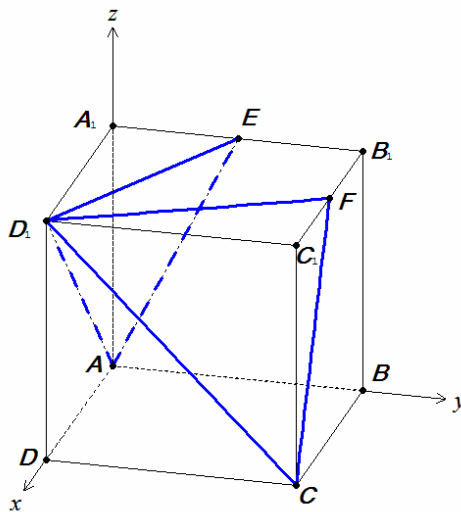


Рис. 12

Ответ: 60° .

11. Векторный метод

Пример 15. В единичном кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ на диагоналях граней AD_1 и $D_1 B_1$ взяты точки E и F так, что $D_1 E = \frac{1}{3} AD_1$, $D_1 F = \frac{2}{3} D_1 B_1$. Найдите длину отрезка EF .

Решение. Пусть $\overline{AD} = \vec{a}$, $\overline{AB} = \vec{b}$, $\overline{AA_1} = \vec{c}$ (рис. 1), тогда $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c} = \vec{b} \cdot \vec{c} = 0$.

Выразим вектор \overline{FE} через базисные векторы \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} :

$$\begin{aligned} \overline{FE} &= \overline{EA} + \overline{AB_1} + \overline{B_1 F} = -\frac{2}{3}(\vec{a} + \vec{c}) + (\vec{b} + \vec{c}) + \frac{1}{3}(\vec{a} - \vec{b}) = \\ &= -\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\overline{FE}| &= \sqrt{FE^2} = \sqrt{\left(-\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{4}{9} + \frac{1}{9}} = \\ &= \sqrt{\frac{6}{9}} = \frac{\sqrt{6}}{3}. \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

Пример 16. В единичном кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ найдите расстояние от точки D_1 до прямой PQ , где P и Q – середины соответственно ребер $A_1 B_1$ и BC .

Решение. Пусть $\overline{AD} = \vec{a}$, $\overline{AB} = \vec{b}$, $\overline{AA_1} = \vec{c}$ (рис. 1), тогда $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c} = \vec{b} \cdot \vec{c} = 0$.

Выразим вектор \overline{PQ} через базисные векторы \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} :

$$\overline{PQ} = \overline{PB_1} + \overline{B_1 B} + \overline{BQ} = \frac{1}{2}\vec{b} - \vec{c} + \frac{1}{2}\vec{a} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} - \vec{c}$$

$\overline{PD_1} = -\frac{1}{2}\vec{b} + \vec{a}$. Пусть $D_1 N \perp PQ$, где

$N \in PQ$. Выразим вектор $\overline{D_1 N}$, учитывая коллинеарность векторов \overline{PN} и \overline{PQ} :

$$\overline{D_1 N} = \overline{PN} - \overline{PD_1} = x \cdot \overline{PQ} - \overline{PD_1}.$$

Так как $\overline{D_1 N} \perp \overline{PQ}$, то $\overline{D_1 N} \cdot \overline{PQ} = 0$. Отсюда получаем $(x \cdot \overline{PQ} - \overline{PD_1}) \cdot \overline{PQ} = 0$, $x \cdot \overline{PQ}^2 = \overline{PD_1} \cdot \overline{PQ}$,

$$x \cdot \left(\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} - \vec{c}\right)^2 = \left(-\frac{1}{2}\vec{b} + \vec{a}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} - \vec{c}\right),$$

$$x \cdot \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 1\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}, \quad x = \frac{1}{6}.$$

$$\begin{aligned} \overline{D_1 N} &= \frac{1}{6} \cdot \overline{PQ} - \overline{PD_1} = \frac{1}{6} \left(\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} - \vec{c}\right) + \frac{1}{2}\vec{b} - \vec{a} = \\ &= -\frac{11}{12}\vec{a} + \frac{7}{12}\vec{b} - \frac{1}{6}\vec{c}. \end{aligned}$$

Длина вектора

$$\begin{aligned} |\overline{D_1 N}| &= \sqrt{D_1 N^2} = \sqrt{\left(-\frac{11}{12}\vec{a} + \frac{7}{12}\vec{b} - \frac{1}{6}\vec{c}\right)^2} = \\ &= \sqrt{\frac{121}{144} + \frac{49}{144} + \frac{1}{36}} = \frac{\sqrt{174}}{12}. \end{aligned}$$

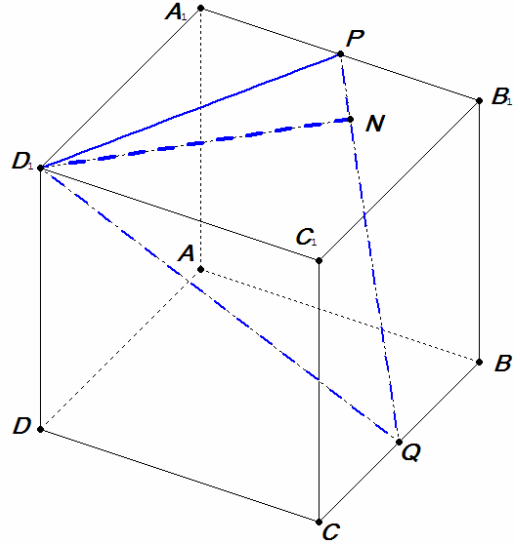


Рис. 13

Ответ: $\frac{\sqrt{174}}{12}$.

Пример 17. В единичном кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ найдите расстояние от точки A_1 до плоскости BDC_1 .

Решение. Пусть $\overline{AD} = \vec{a}$, $\overline{AB} = \vec{b}$, $\overline{AA_1} = \vec{c}$ (рис. 14), тогда $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c} = \vec{b} \cdot \vec{c} = 0$.

Выразим некоторые векторы через базисные векторы \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} : $\overline{DB} = \vec{b} - \vec{a}$, $\overline{DC_1} = \vec{b} + \vec{c}$, $\overline{C_1 A_1} = -\vec{a} - \vec{b}$. Пусть $MA_1 \perp BDC_1$, где

$M \in BDC_1$. Вектор $\overline{C_1 M} = x \cdot \overline{DB} + y \cdot \overline{DC_1}$, поэтому

$$\overline{MA_1} = \overline{C_1 A_1} - \overline{C_1 M} = \overline{C_1 A_1} - (x \cdot \overline{DB} + y \cdot \overline{DC_1}).$$

$$\text{Далее имеем } \begin{cases} \overline{MA_1} \perp \overline{DB} \\ \overline{MA_1} \perp \overline{DC_1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{MA_1} \cdot \overline{DB} = 0 \\ \overline{MA_1} \cdot \overline{DC_1} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \overline{C_1 A_1} \cdot \overline{DB} - (x \cdot \overline{DB}^2 + y \cdot \overline{DC_1} \cdot \overline{DB}) = 0 \\ \overline{C_1 A_1} \cdot \overline{DC_1} - (x \cdot \overline{DB} \cdot \overline{DC_1} + y \cdot \overline{DC_1}^2) = 0 \end{cases}$$

Так как $\overline{C_1 A_1} \cdot \overline{DB} = (-\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{b} - \vec{a}) = \vec{a}^2 - \vec{b}^2 = 0$, $\overline{DC_1} \cdot \overline{DB} = (\vec{b} + \vec{c}) \cdot (\vec{b} - \vec{a}) = \vec{b}^2 = 1$,

$$\overline{DC_1} \cdot \overline{C_1A_1} = (\overline{b} + \overline{c})(-\overline{a} - \overline{b}) = -\overline{b}^2 = -1,$$

$$\overline{DB}^2 = (\overline{b} - \overline{a})^2 = \overline{b}^2 + \overline{a}^2 = 2,$$

$$\overline{DC_1}^2 = (\overline{b} + \overline{c})^2 = \overline{b}^2 + \overline{c}^2 = 2, \text{ то имеем}$$

$$\begin{cases} 0 - (x \cdot 2 + y \cdot 1) = 0 \\ -1 - (x \cdot 1 + y \cdot 2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = 0 \\ x + 2y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ y = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

Отсюда получаем

$$\overline{MA_1} = -\overline{a} - \overline{b} - \frac{1}{3}(\overline{b} - \overline{a}) + \frac{2}{3}(\overline{b} + \overline{c}) = -\frac{2}{3}\overline{a} - \frac{2}{3}\overline{b} + \frac{2}{3}\overline{c}$$

$$|\overline{MA_1}| = \sqrt{\left(-\frac{2}{3}\overline{a} - \frac{2}{3}\overline{b} + \frac{2}{3}\overline{c}\right)^2} = \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{4}{9} + \frac{4}{9}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Ответ: $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

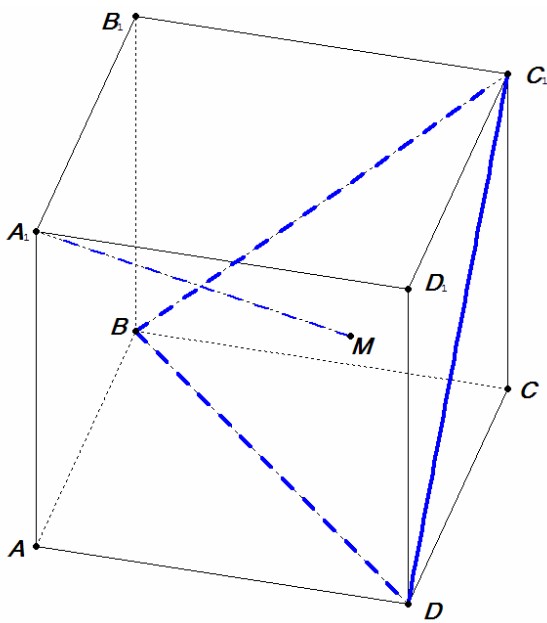


Рис. 14

Пример 18. В единичном кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ найдите расстояние между прямыми AB_1 и BD .

Решение. Пусть $\overline{AD} = \overline{a}$, $\overline{AB} = \overline{b}$, $\overline{AA_1} = \overline{c}$ (рис. 15), тогда $|\overline{a}| = |\overline{b}| = |\overline{c}| = 1$, $\overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{a} \cdot \overline{c} = \overline{b} \cdot \overline{c} = 0$.

Если M и N – основания общего перпендикуляра прямых AB_1 и BD соответственно, то имеем

$$\overline{AB_1} = \overline{b} + \overline{c}, \quad \overline{DB} = \overline{b} - \overline{a},$$

$$\overline{MN} = \overline{MA} + \overline{AD} + \overline{DN} = x \cdot \overline{AB_1} + \overline{a} + y \cdot \overline{DB} = x(\overline{b} + \overline{c}) + \overline{a} + y(\overline{b} - \overline{a}) =$$

$$= (1-y) \cdot \overline{a} + (x+y) \cdot \overline{b} + x \cdot \overline{c}.$$

Вектор \overline{MN} перпендикулярен векторам $\overline{AB_1}$ и \overline{DB} , поэтому имеем

$$\begin{cases} \overline{MN} \cdot \overline{AB_1} = 0 \\ \overline{MN} \cdot \overline{DB} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} ((1-y) \cdot \overline{a} + (x+y) \cdot \overline{b} + x \cdot \overline{c})(\overline{b} + \overline{c}) = 0 \\ ((1-y) \cdot \overline{a} + (x+y) \cdot \overline{b} + x \cdot \overline{c})(\overline{b} - \overline{a}) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+y) \cdot \overline{b}^2 + x \cdot \overline{c}^2 = 0 \\ -(1-y) \cdot \overline{a}^2 + (x+y) \cdot \overline{b}^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2x + y = 0 \\ x + 2y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{3} \\ y = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Итак,

$$\overline{MN} = -\frac{1}{3}(\overline{b} + \overline{c}) + \overline{a} + \frac{2}{3}(\overline{b} - \overline{a}) = \frac{1}{3}\overline{a} + \frac{1}{3}\overline{b} - \frac{1}{3}\overline{c},$$

$$|\overline{MN}| = \sqrt{\left(\frac{1}{3}\overline{a} + \frac{1}{3}\overline{b} - \frac{1}{3}\overline{c}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

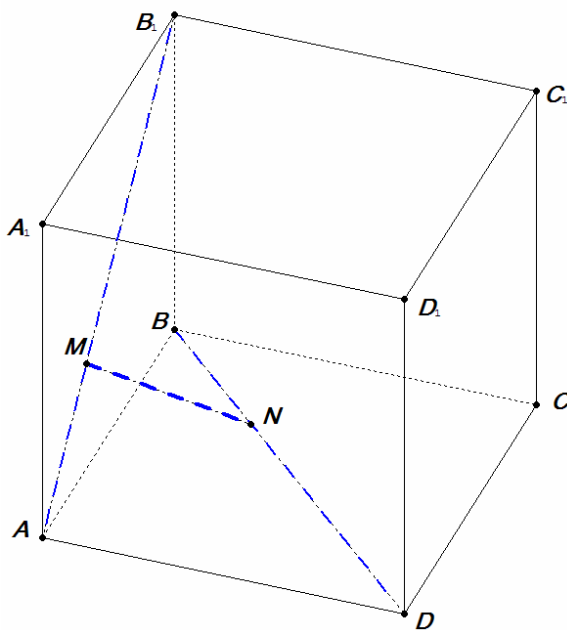


Рис. 15

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Пример 19. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ найдите угол между прямыми EF и PQ , где E, F, P, Q – середины ребер DD_1, BC, AA_1 и B_1C_1 соответственно.

Решение. Пусть $\overline{AD} = \bar{a}$, $\overline{AB} = \bar{b}$, $\overline{AA_1} = \bar{c}$ (рис. 16), где $|\bar{a}| = |\bar{b}| = |\bar{c}| = 1$, $\bar{a} \cdot \bar{b} = \bar{a} \cdot \bar{c} = \bar{b} \cdot \bar{c} = 0$. Тогда $\overline{EF} = \overline{ED} + \overline{DC} + \overline{CF} = -\frac{1}{2}\bar{c} + \bar{b} - \frac{1}{2}\bar{a}$,
 $\overline{PQ} = \overline{PA_1} + \overline{A_1B_1} + \overline{B_1Q} = \frac{1}{2}\bar{c} + \bar{b} + \frac{1}{2}\bar{a}$, откуда на-
 ходим

$$\begin{aligned} \overline{PQ} \cdot \overline{EF} &= \left(\frac{1}{2}\bar{c} + \bar{b} + \frac{1}{2}\bar{a}\right) \left(-\frac{1}{2}\bar{c} + \bar{b} - \frac{1}{2}\bar{a}\right) = \\ &= \bar{b}^2 - \frac{1}{4}\bar{c}^2 - \frac{1}{4}\bar{a}^2 = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}, \\ |\overline{PQ}| &= \sqrt{\left(\frac{1}{2}\bar{c} + \bar{b} + \frac{1}{2}\bar{a}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4}\bar{c}^2 + \bar{b}^2 + \frac{1}{4}\bar{a}^2} = \\ &= \sqrt{\frac{1}{4} + 1 + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{2}}, \\ |\overline{EF}| &= \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\bar{c} + \bar{b} - \frac{1}{2}\bar{a}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4}\bar{c}^2 + \bar{b}^2 + \frac{1}{4}\bar{a}^2} = \\ &= \sqrt{\frac{1}{4} + 1 + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{2}}, \\ \cos \varphi &= \frac{|\overline{PQ} \cdot \overline{EF}|}{|\overline{PQ}| \cdot |\overline{EF}|} = \frac{1/2}{\sqrt{3/2} \cdot \sqrt{3/2}} = \frac{1}{3}, \quad \varphi = \arccos \frac{1}{3}, \text{ где } \varphi \end{aligned}$$

- искомый угол.

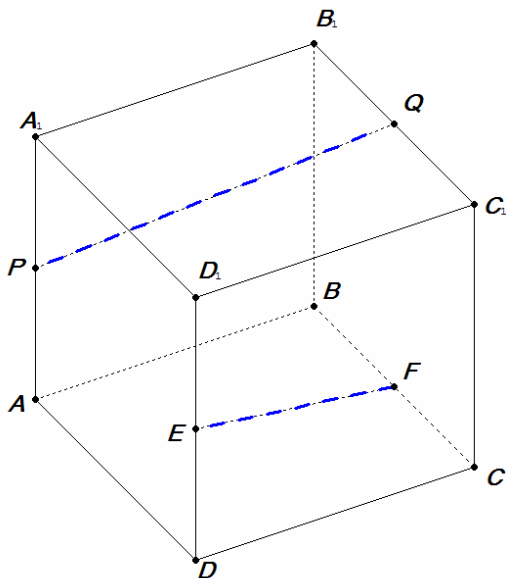


Рис. 16

Ответ: $\arccos \frac{1}{3}$.

Пример 20. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямой DE , где E – сере-

дина апофемы SF грани ASB , и плоскостью ASC .

Решение. Так как прямая OD перпендикулярна плоскости ASC , то вектор \overline{OD} является вектором нормали плоскости ASC .

Пусть $\overline{AD} = \bar{a}$, $\overline{AB} = \bar{b}$, $\overline{AS} = \bar{c}$ (рис. 17), где $|\bar{a}| = |\bar{b}| = |\bar{c}| = 1$, $\bar{a} \cdot \bar{b} = 0$,

$\bar{a} \cdot \bar{c} = \bar{b} \cdot \bar{c} = |\bar{a}|^2 \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$. Тогда

$$\begin{aligned} \overline{OD} &= \overline{OA} + \overline{AD} = -\frac{1}{2}(\bar{a} + \bar{b}) + \bar{a} = \frac{1}{2}(\bar{a} - \bar{b}), \\ \overline{DE} &= \overline{DA} + \overline{AF} + \overline{FE} = -\bar{a} + \frac{1}{2}\bar{b} + \frac{1}{2}\left(\bar{c} - \frac{1}{2}\bar{b}\right) = \\ &= -\bar{a} + \frac{1}{4}\bar{b} + \frac{1}{2}\bar{c}, \\ \overline{DE} \cdot \overline{OD} &= \left(-\bar{a} + \frac{1}{4}\bar{b} + \frac{1}{2}\bar{c}\right) \left(\frac{1}{2}\bar{a} - \frac{1}{2}\bar{b}\right) = \\ &= -\frac{1}{2}\bar{a}^2 - \frac{1}{8}\bar{b}^2 + \frac{1}{4}\bar{a} \cdot \bar{c} - \frac{1}{4}\bar{b} \cdot \bar{c} = \frac{1}{2} - \frac{1}{8} = \frac{3}{8}, \\ |\overline{DE}| &= \sqrt{\left(-\bar{a} + \frac{1}{4}\bar{b} + \frac{1}{2}\bar{c}\right)^2} = \\ &= \sqrt{\bar{a}^2 + \frac{1}{16}\bar{b}^2 + \frac{1}{4}\bar{c}^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \bar{a} \cdot \bar{c} + 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \bar{b} \cdot \bar{c}} = \\ &= \sqrt{1 + \frac{1}{16} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{8}} = \sqrt{\frac{15}{16}}, \\ |\overline{OD}| &= \sqrt{\left(\frac{1}{2}\bar{a} - \frac{1}{2}\bar{b}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{1}{2}}, \\ \sin \varphi &= \frac{|\overline{DE} \cdot \overline{OD}|}{|\overline{DE}| \cdot |\overline{OD}|} = \frac{3/8}{\sqrt{15/16} \cdot \sqrt{1/2}} = \frac{3}{\sqrt{30}}, \\ \varphi &= \arcsin \frac{3}{\sqrt{30}}, \text{ где } \varphi \text{ - искомый угол.} \end{aligned}$$

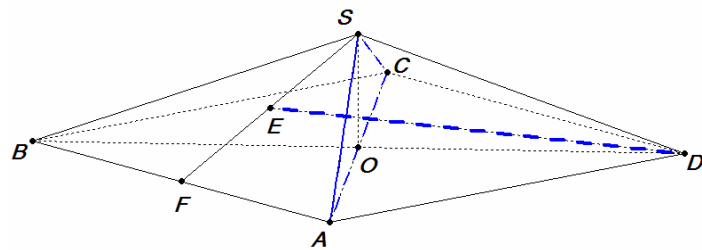


Рис. 17

Ответ: $\arcsin \frac{3}{\sqrt{30}}$.

Пример 21. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ найдите угол между плоскостями $AB_1 C$ и $BC_1 D$.

Решение. Пусть $\overline{AD} = \overline{a}$, $\overline{AB} = \overline{b}$, $\overline{AA_1} = \overline{c}$ (рис. 18), где $|\overline{a}| = |\overline{b}| = |\overline{c}| = 1$, $\overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{a} \cdot \overline{c} = \overline{b} \cdot \overline{c} = 0$.

Векторы $\overline{BD_1}$ и $\overline{CA_1}$ являются векторами нормали плоскостей $AB_1 C$ и $BC_1 D$ соответственно, так как $BD_1 \perp AB_1 C$ и $CA_1 \perp BC_1 D$. Тогда

$$\overline{BD_1} = \overline{a} - \overline{b} + \overline{c}, \quad \overline{CA_1} = -\overline{a} - \overline{b} + \overline{c},$$

$$\overline{BD_1} \cdot \overline{CA_1} = (\overline{a} - \overline{b} + \overline{c}) \cdot (-\overline{a} - \overline{b} + \overline{c}) = -\overline{a}^2 + \overline{b}^2 + \overline{c}^2 = 1$$

$$|\overline{BD_1}| = \sqrt{(\overline{a} - \overline{b} + \overline{c})^2} = \sqrt{\overline{a}^2 + \overline{b}^2 + \overline{c}^2} = \sqrt{3},$$

$$|\overline{CA_1}| = \sqrt{(-\overline{a} - \overline{b} + \overline{c})^2} = \sqrt{\overline{a}^2 + \overline{b}^2 + \overline{c}^2} = \sqrt{3},$$

$$\cos \varphi = \frac{|\overline{BD_1} \cdot \overline{CA_1}|}{|\overline{BD_1}| \cdot |\overline{CA_1}|} = \frac{1}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{1}{3}, \quad \varphi = \arccos \frac{1}{3},$$

где φ - искомый угол.

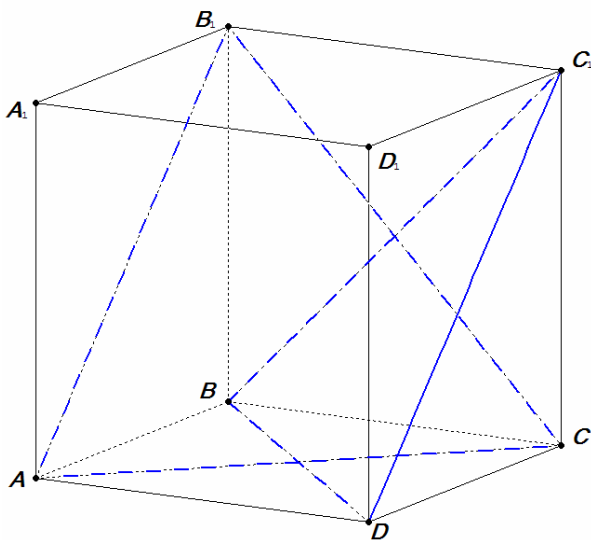


Рис. 18

Ответ: $\arccos \frac{1}{3}$.

12. Метод объемов

• При составлении уравнения используется объем фигуры, выраженный двумя независимыми способами.

Пример 22. Ребро куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ равно a . Найдите расстояние от точки C до плоскости BDC_1 .

Решение. Искомое расстояние x равно высоте CQ (рис. 19), опущенной в пирамиде $BCDC_1$ из вершины C на основание BDC_1 .

Объем этой пирамиды равен

$$\frac{1}{3} S_{BCD} \cdot CC_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot BC \cdot CD \cdot CC_1 = \frac{a^3}{6}.$$

С другой стороны, так как треугольник BDC_1 равнобедренный со стороной $a\sqrt{2}$, объем пирамиды равен

$$\frac{1}{3} S_{BDC_1} \cdot CQ = \frac{1}{3} \cdot \frac{(a\sqrt{2})^2 \sqrt{3}}{4} \cdot x = \frac{a^2 \sqrt{3}}{6} \cdot x.$$

Отсюда получаем уравнение $\frac{a^3}{6} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{6} \cdot x$, из которого находим $x = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

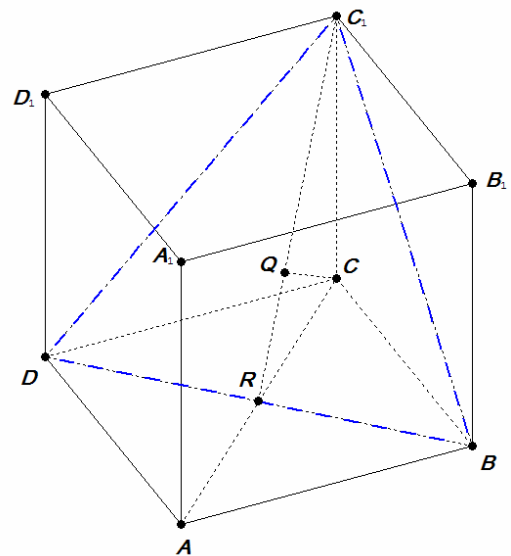


Рис. 19

Ответ: $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

13. Метод ключевых задач

Ключевая задача № 1

• Если S – площадь фигуры Φ , расположенной в плоскости α , S' – площадь проекции фигуры Φ на плоскость β , то справедлива формула

$$\cos \angle(\alpha; \beta) = \frac{S'}{S}.$$

Пример 23. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ найдите угол между плоскостями $AB_1 C$ и ABC .

Решение. Пусть α - искомый угол. Используем соотношение $S_{ABC} = S_{AB_1C} \cdot \cos \alpha$ (рис. 20), где

$S_{ABC} = \frac{1}{2}$, $S_{AB_1C} = \frac{(\sqrt{2})^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (треугольник AB_1C равносторонний). Отсюда имеем

$$\cos \alpha = \frac{1}{2} : \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \alpha = \arccos \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

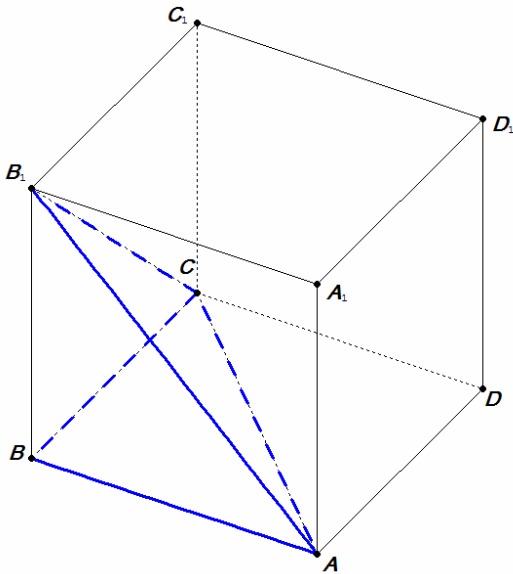


Рис. 20

Ответ: $\arccos \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Ключевая задача № 2 (теорема о трех синусах)

• Пусть в одной из граней двугранного угла, величина которого равна α , проведена прямая, составляющая с ребром двугранного угла угол β ($0^\circ < \beta < 90^\circ$), γ - величина угла между этой прямой и другой гранью. Тогда справедливо следующее соотношение:

$$\sin \gamma = \sin \alpha \sin \beta.$$

Пример 24. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ найдите угол между плоскостями AB_1C и ABC .

Решение. Пусть α - искомый угол (рис. 20). Так как $\beta = \angle B_1AC = 60^\circ$, $\gamma = \angle B_1AB = 45^\circ$, то имеем

$$\sin 45^\circ = \sin \alpha \sin 60^\circ, \quad \sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} : \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}},$$

$$\alpha = \arcsin \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Ответ: $\arcsin \sqrt{\frac{2}{3}}$.

Ключевая задача № 3 (теорема о трех косинусах)

• Пусть α - величина угла между наклонной l и ее проекцией на некоторую плоскость, β - величина угла между проекцией наклонной l и прямой, проведенной через основание той же наклонной в плоскости проекции, и γ - величина угла между наклонной l и прямой, проведенной через ее основание в плоскости проекции. Тогда справедливо следующее соотношение:

$$\cos \gamma = \cos \alpha \cos \beta.$$

Пример 25. Угол между боковыми ребрами правильной четырехугольной пирамиды, не лежащими в одной грани, равен 120° . Найдите плоский угол при вершине пирамиды.

Решение. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ проведем диагональное сечение ASC (рис. 21); SD - наклонная к плоскости сечения, SO - высота пирамиды и проекция SD на эту плоскость, SC - прямая, проведенная в плоскости ASC через основание наклонной. По условию $\angle ASC = 120^\circ$.

На основании теоремы о трех косинусах имеем:

$$\cos \angle DSC = \cos \angle DSO \cdot \cos \angle CSO.$$

Отсюда

$$\cos \angle DSC = \cos 60^\circ \cdot \cos 60^\circ = \cos^2 60^\circ = \frac{1}{4},$$

$$\angle DSC = \arccos \frac{1}{4}.$$

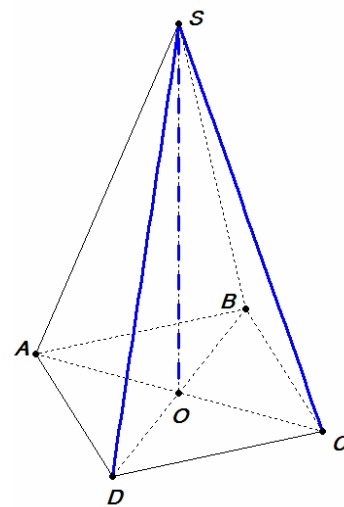


Рис. 21

Ответ: $\arccos \frac{1}{4}$.

Ключевая задача № 4 (теорема косинусов для трехгранного угла)

• Пусть для трехгранного угла плоские углы равны α , β и γ и двугранный угол при ребре, противоположный плоскому углу γ , равен φ . Тогда справедливо следующее соотношение:

$$\cos \varphi = \frac{\cos \gamma - \cos \alpha \cdot \cos \beta}{\sin \alpha \cdot \sin \beta}.$$

Пример 26. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ найдите угол между прямыми AD_1 и DM , где M – середина ребра $D_1 C_1$.

Решение. Пусть ребро куба равно 1, N – середина ребра $A_1 B_1$, тогда искомым углом γ равен углу между AD_1 и AN (рис. 22). Используем теорему косинусов для трехгранного угла с вершиной A , в котором $\angle A_1 A D_1 = \alpha$, $\angle A_1 A N = \beta$, $\angle N A D_1 = \gamma$. Так как $\varphi = 90^\circ$, то имеем $\cos \gamma = \cos \alpha \cos \beta$.

Из треугольника $A_1 A D_1$ находим

$$\cos \alpha = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

из треугольника $A_1 A N$ получаем

$$\cos \beta = \frac{A A_1}{A N} = 1 : \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Отсюда

$$\cos \gamma = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{2}{5}}, \quad \gamma = \arccos \sqrt{\frac{2}{5}}.$$

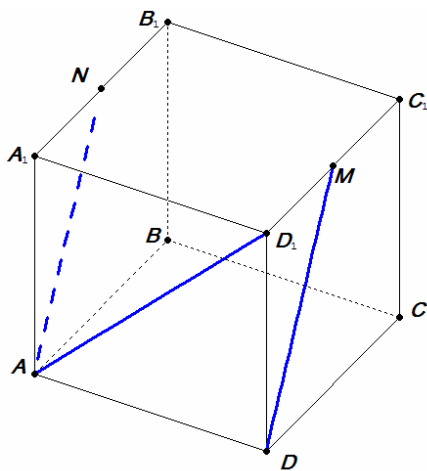


Рис. 22

Ответ: $\arccos \sqrt{\frac{2}{5}}$.

Ключевая задача № 5

• Если некоторая прямая образует углы α , β и γ с тремя попарно перпендикулярными прямыми, то $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$.

Пример 27. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Его диагональ $B_1 D$ составляет с ребром AD угол 45° , а с ребром DC угол 60° . Найдите угол между прямыми $B_1 D$ и DD_1 .

Решение. Используем соотношение $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$, где $\angle A D B_1 = \alpha$, $\angle C D B_1 = \beta$, $\angle D_1 D B_1 = \gamma$ (рис. 23). Получаем $\cos^2 45^\circ + \cos^2 60^\circ + \cos^2 \gamma = 1$,

$$\cos^2 \gamma = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}, \quad \cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \gamma = 45^\circ.$$

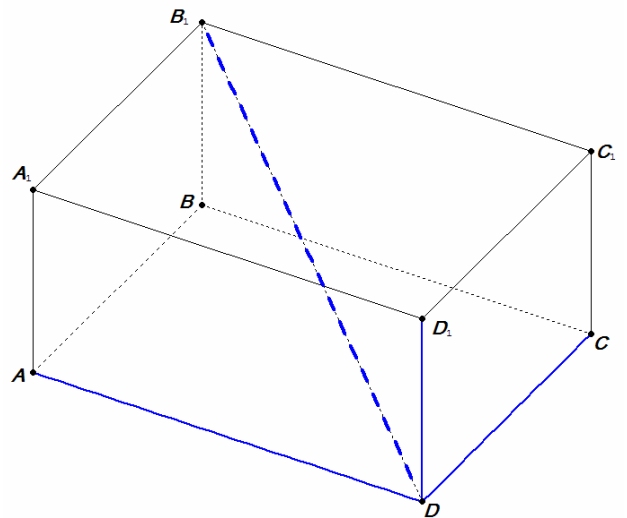


Рис. 23

Ответ: 45° .

Ключевая задача № 6

• Если AB и CD – скрещивающиеся ребра треугольной пирамиды $ABCD$, r – расстояние между ними, $AB = a$, $CD = b$, φ – угол между AB и CD , V – объем пирамиды $ABCD$, то

$$r = \frac{6V}{ab \sin \varphi}.$$

Пример 28. В единичном кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ найдите расстояние между диагональю куба BD_1 и диагональю грани AB_1 .

Решение. Найдем искомое расстояние по формуле $r = \frac{6V}{AB_1 \cdot BD_1 \sin \varphi}$, где V – объем пирамиды

ды ABB_1D_1 (рис. 24), $AB_1 = \sqrt{2}$, $BD_1 = \sqrt{3}$,
 $\varphi = \frac{\pi}{2}$ - угол между прямыми BD_1 и AB_1 . Так
как площадь основания ABB_1 пирамиды
 ABB_1D_1 равна $\frac{1}{2}$, а высота A_1D_1 равна 1, то
 $V = \frac{1}{6}$. Следовательно, $r = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \sqrt{3}}} = \frac{1}{\sqrt{6}}$.

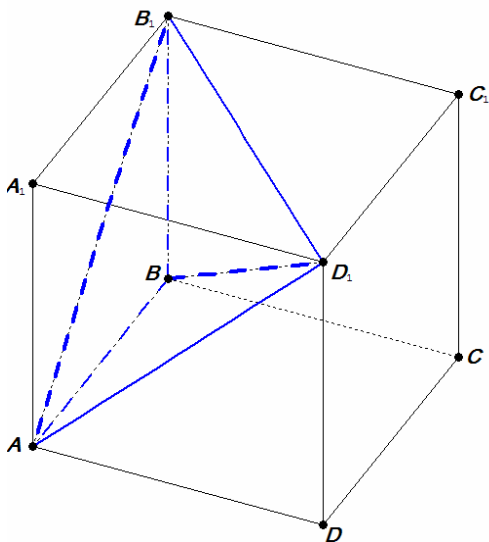


Рис. 24

Ответ: $\frac{1}{\sqrt{6}}$.

Литература

1. Самое полное издание типовых вариантов реальных заданий ЕГЭ 2010: Математика /авт.-сост. И. Р. Высоцкий, Д. Д. Гущин, П. И. Захаров и др.; под ред. А. Л. Семенова, И. В. Яценко. – М.: АСТ: Астрель, 2009. – (Федеральный институт педагогических измерений).
2. ЕГЭ. Математика. Тематическая тетрадь. 11 класс / И. В. Яценко, С. А. Шестаков, П. И. Захаров. – М.: МЦНМО, Издательство «Экзамен», 2010.
3. Единый государственный экзамен 2010. Математика. Универсальные материалы для подготовки учащихся / ФИПИ – М.: Интеллект-Центр, 2010.
4. ЕГЭ 2010. Математика: Сборник тренировочных работ / Высоцкий И.Р., Захаров П.И., Панфёров В.С., Семёнов А.В., Сергеев И.Н., Смирнов В.А., Шестаков С.А., Яценко И.В. – М.: МЦНМО, 2009.

5. ЕГЭ 2010. Математика. Типовые тестовые задания /под ред. А. Л. Семенова, И. В. Яценко. – М.: Издательство «Экзамен», 2010.
6. Яценко И. В., Шестаков С. А., Захаров П. И. Подготовка к ЕГЭ по математике в 2010 году. Методические указания. – М.: МЦНМО, 2009.
7. www.mathege.ru - Математика ЕГЭ 2010 (открытый банк заданий)