

C5.1 – C5.4

Первые четыре задачи из сборника объединим в одну из-за того, что в них рассматривается одно и то же неравенство.

Найдите все значения x , для каждого из которых неравенство

$$ax^2 - 4x + 3a + 1 > 0$$

C5.1 ... выполняется для всех x .

Прежде всего, заметим, что при $a < 0$ неравенство не может выполняться для всех x , т.к. множество его положительных решений (если таковые вообще имеются) является ограниченным отрезком.

Тогда при $a > 0$ неравенство будет выполняться при любом x , если парабола находится выше оси абсцисс, т.е.

$$D < 0 \rightarrow 16 - 4a(3a + 1) = 16 - 12a^2 - 4a = -4(3a^2 + a - 4) = -12\left(a + \frac{4}{3}\right)(a - 1) < 0$$

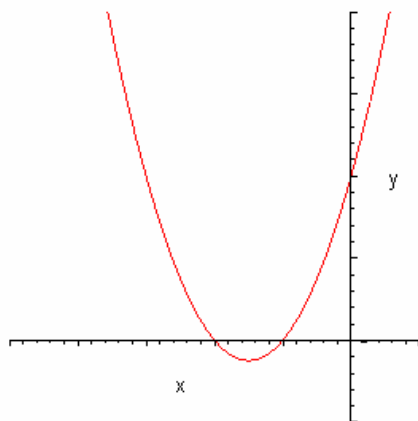
Получаем $a < -\frac{4}{3}$; $a > 1$, с учетом $a > 0 \rightarrow a > 1$

Ответ в C5.1: $a > 1$

C5.2 ... выполняется для всех $x > 0$

При $a < 0$ условие не выполняется, при $a > 1$ - выполняется (см. выше)

Возможен еще следующий вариант:



$$\begin{cases} D \geq 0 \\ x_0 = \frac{4}{2a} \leq 0 \\ f(0) \geq 0 \end{cases}$$

При $a > 0$ второе неравенство системы невозможно, значит такого варианта быть не может.

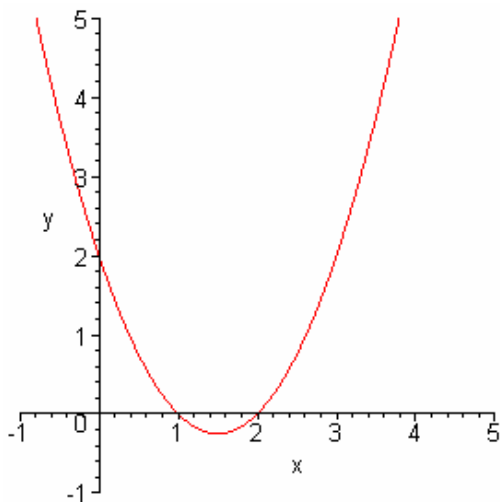
Если $a = 0 \rightarrow -4x + 1 > 0 \rightarrow x < \frac{1}{4}$ - условие не выполняется для любого x .

Окончательно – ответ в C5.2: $a > 0$

C5.3 ... выполняется при всех $x < 0$

При $a < 0$ условие не выполняется, при $a > 1$ - выполняется (см. выше)

Возможен еще следующий вариант:



$$\begin{cases} D \geq 0 \\ x_0 = \frac{4}{2a} \geq 0 \\ f(0) \geq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -\frac{4}{3} \leq a \leq 1 \\ a > 0 \\ 3a + 1 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\frac{4}{3} \leq a \leq 1 \\ a > 0 \\ a \geq -\frac{1}{3} \end{cases} \rightarrow 0 < a \leq 1$$

И еще случай, если $a = 0 \rightarrow -4x + 1 > 0 \rightarrow x < \frac{1}{4}$ - условие выполнено.

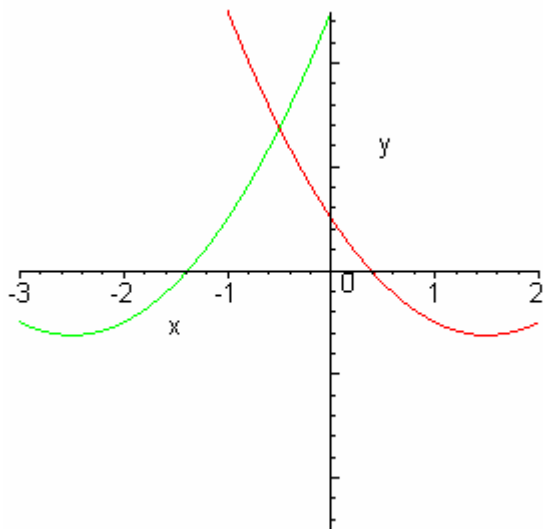
Окончательно – ответ в С5.3: $a \geq 0$

С5.4 ... выполняется для всех $-1 < x < 0$

При $a > 1$ - выполняется (см. выше)

Если $a = 0 \rightarrow -4x + 1 > 0 \rightarrow x < \frac{1}{4}$ - условие выполнено.

1) Рассмотрим случай $a > 0$



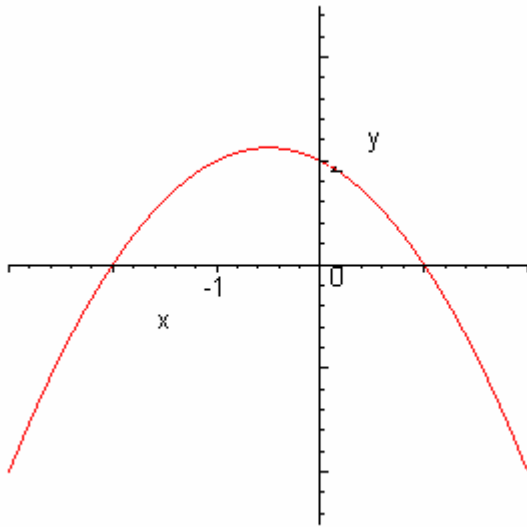
Для выполнения условия задачи:

$$\begin{cases} D \geq 0 \\ \frac{4}{2a} \geq 0 \\ f(0) \geq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -\frac{4}{3} \leq a \leq 1 \\ a > 0 \\ 3a + 1 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} D \geq 0 \\ \frac{4}{2a} \leq -1 \\ f(-1) \geq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -\frac{4}{3} \leq a \leq 1 \\ \frac{4}{2a} \leq -1 \\ a + 4 + 3a + 1 \geq 0 \end{cases}$$

Вторая система не имеет решений при $a > 0$. Окончательно $0 < a \leq 1$

2) Рассмотрим случай $a < 0$



Для выполнения условия задачи:

$$\begin{cases} D > 0 \\ f(-1) \geq 0 \\ f(0) \geq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -\frac{4}{3} < a < 0 \\ a \geq -\frac{5}{4} \\ a \geq -\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$-\frac{1}{3} \leq a < 0$$

С учетом всего вышесказанного:

$$\begin{cases} a > 1 \\ 0 < a \leq 1 \\ -\frac{1}{3} \leq a < 0 \\ a = 0 \end{cases} \rightarrow a \geq -\frac{1}{3}$$

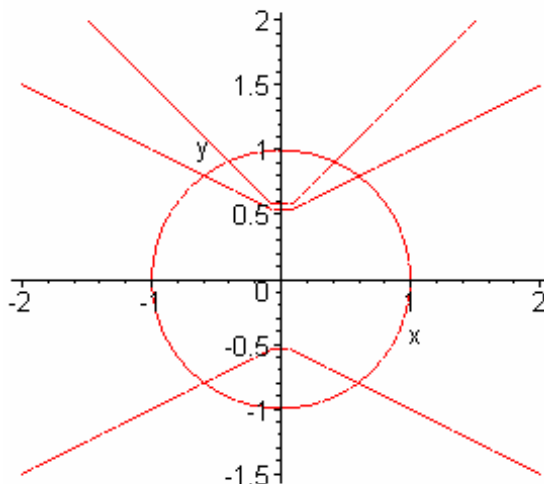
Ответ в С5.4: $a \geq -\frac{1}{3}$

C5.5 Найдите все значения p , при каждом из которых для любого q система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y = q|x| + p \end{cases}$$

имеет решения.

Задачу можно решить по-разному. Способ первый – графически. График функции, заданной первым уравнением – окружность радиуса 1 с центром в начале координат. График функции, заданной вторым уравнением должен пересекать эту окружность при любом q , т.е. при любом угле наклона прямых этой ломаной.



Нетрудно видеть, что это условие для любого угла наклона выполняется при сдвиге вершины ломаной по оси y не более чем на единицу вниз или вверх

Ответ: $-1 \leq p \leq 1$.

Второй способ. Подстановкой.

$$x^2 + q^2 x^2 + 2pq|x| + p^2 - 1 = 0$$

$$(1 + q^2)x^2 + 2pq|x| + p^2 - 1 = 0$$

Заметим, что $1 + q^2 > 0$, а для выполнения условия задачи это уравнение должно иметь как минимум один неотрицательный корень. Чтоб это выполнялось при любом q , т.е. независимо от положения вершины параболы от начала координат, необходимо, чтобы $f(0) \leq 0$.

$$\text{Т.е. } p^2 - 1 \leq 0 \rightarrow -1 \leq p \leq 1.$$

C5.6 Найдите все значения p , при каждом из которых найдется q , такое, что система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y = q|x| + p \end{cases}$$

имеет единственное решение.

$$x^2 + q^2 x^2 + 2pq|x| + p^2 - 1 = 0$$

$$(1 + q^2)x^2 + 2pq|x| + p^2 - 1 = 0$$

Если корни уравнения $|x| = a$ вообще есть, то хотя бы один из них должен быть неотрицательным. Но любой неотрицательный корень $|x| = a$ будет давать два решения $x = a$ $x = -a$. Чтоб решение было единственным, необходимо, чтобы $|x| = 0$.

$$\text{Тогда } p^2 - 1 = 0 \rightarrow p = \pm 1$$

Ответ: $p = \pm 1$

<http://alexlarin.narod.ru>

С 5.7

Найти все значения a , при каждом из которых неравенство $\left| \frac{x^2 - ax + 1}{x^2 + x + 1} \right| < 3$

выполняется при всех x .

$$-3 < \frac{x^2 - ax + 1}{x^2 + x + 1} < 3, \text{ заметим, что } x^2 + x + 1 > 0 \text{ при любом } x.$$

Получаем:

$$\begin{cases} \frac{x^2 - ax + 1}{x^2 + x + 1} < 3 \\ \frac{x^2 - ax + 1}{x^2 + x + 1} > -3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2 - ax + 1 < 3x^2 + 3x + 3 \\ x^2 - ax + 1 > -3x^2 - 3x - 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3x^2 + (3+a)x + 2 > 0 \\ 4x^2 + (3-a)x + 4 > 0 \end{cases}$$

Т.к. неравенства должны выполняться при любом x , получаем:

$$\begin{cases} (3+a)^2 - 16 < 0 \\ (3-a)^2 - 64 < 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -4 < 3+a < 4 \\ -8 < 3-a < 8 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -7 < a < 1 \\ -5 < a < 11 \end{cases} \rightarrow a \in (-5; 1)$$

Ответ: $a \in (-5; 1)$

С 5.8

Найдите все такие целые a и b , для которых один из корней уравнения $3x^2 + ax^2 + bx + 12 = 0$ равен $1 + \sqrt{3}$.

Подставим этот корень в уравнение:

$$12 + 6\sqrt{3} + 4a + 2\sqrt{3}a + b + \sqrt{3}b + 12 = 0$$

$$6\sqrt{3} + 2\sqrt{3}a + \sqrt{3}b + 4a + b + 12 = 0$$

$$\sqrt{3}(6 + 2a + b) + 4a + b + 24 = 0$$

Поскольку a и b – целые числа, то равенство возможно только в случае, если

$$\begin{cases} 6 + 2a + b = 0 \\ 4a + b + 24 = 0 \end{cases} \rightarrow 2a + 18 = 0 \rightarrow \begin{cases} a = -9 \\ b = 12 \end{cases}$$

Ответ: $\begin{cases} a = -9 \\ b = 12 \end{cases}$

Внимание!

Поскольку в сборнике указаны другие ответы $\begin{cases} a = -12 \\ b = 6 \end{cases}$, сделаем проверку, подставим эти значения в исходное уравнение.

Получаем $x = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{3}$

При подстановке ответов $\begin{cases} a = -9 \\ b = 12 \end{cases}$ получаем $x = 1 \pm \sqrt{3}$.

С 5.9

При всех a решить уравнение $x - \sqrt{a - x^2} = 1$.

$$\sqrt{a - x^2} = x - 1$$

При $a < 0$ корней нет, при $a = 0$ $x = 0 \neq 1$ - нет корней.

Чтоб корни были необходимо, чтобы $x \geq 1$, тогда

$$a - x^2 = x^2 - 2x + 1$$

$$2x^2 - 2x + 1 - a = 0$$

$$D = 4 + 8(a - 1) = 8a - 4; \quad a \geq \frac{1}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{2a-1}}{4} = \frac{1 \pm \sqrt{2a-1}}{2}$$

$$\frac{1 \pm \sqrt{2a-1}}{2} \geq 1$$

$$\pm \sqrt{2a-1} \geq 1$$

Подходит только один корень $\frac{1 + \sqrt{2a-1}}{2}$

$$\frac{1 + \sqrt{2a-1}}{2} \geq 1 \rightarrow \sqrt{2a-1} \geq 1 \rightarrow a \geq 1$$

Еще надо учесть условие $a - x^2 \geq 0 \rightarrow x^2 \leq a$

$$\frac{1 + 2\sqrt{2a-1} + 2a - 1}{4} \leq a$$

$$\sqrt{2a-1} + a \leq 2a \rightarrow \sqrt{2a-1} \leq a \rightarrow a^2 - 2a + 1 \geq 0$$

Условие выполняется при любом a .

Итого: при $a \geq 1$ $x = \frac{1 + \sqrt{2a-1}}{2}$, при $a < 1$ нет корней.

С 5.10

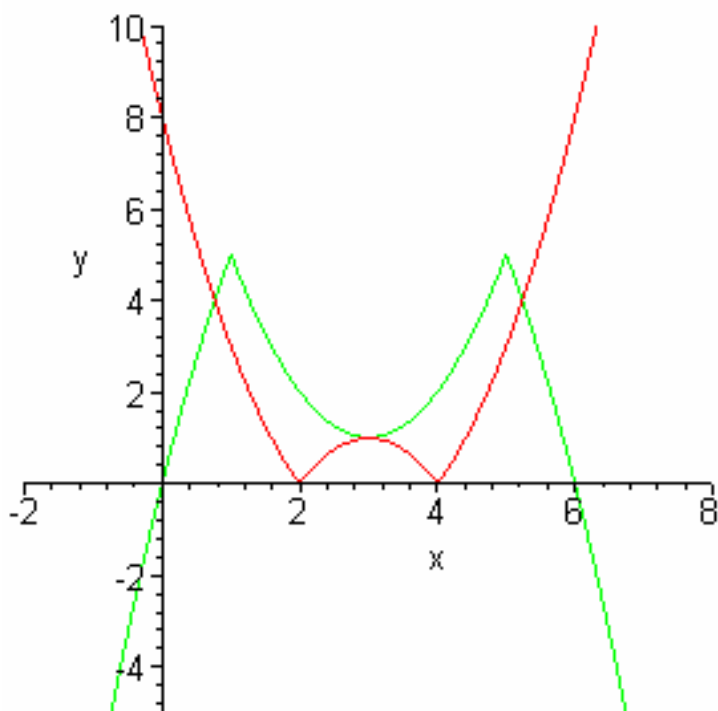
Найти все значения a , при каждом из которых уравнение

$$|x^2 - 6x + 8| + |x^2 - 6x + 5| = a$$

имеет ровно три корня.

Решаем графически $|x^2 - 6x + 8| = -|x^2 - 6x + 5| + a$

Как легко видеть, ровно три корня могут быть только в том случае, если графики левой и правой частей уравнения имеют три общие точки.



Т.е. при совпадении значений в вершинах при $x = 3$

$$\text{Получаем } |9 - 18 + 8| = -|9 - 18 + 5| + a \rightarrow 1 = -4 + a \rightarrow a = 5$$

Ответ: $a = 5$

Тренировочная работа №1 С5

Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение $(a + 4x - x^2 - 1)(a + 1 - |x - 2|) = 0$ имеет ровно три различных корня.

$$x^2 - 4x + 1 - a = 0 \quad (1) \quad \text{или} \quad a + 1 - |x - 2| = 0 \quad \rightarrow \quad |x - 2| = a + 1 \quad (2)$$

Если уравнение (1) не имеет корней, трех различных корней быть не может.

Если уравнение (1) имеет один корень (при $a = -3$ $x = 2$), тогда уравнение (2) вообще не имеет корней.

Значит уравнение (1) должно иметь 2 различных корня.

При этом возможно, что один из корней уравнения (2) должен быть корнем уравнения (1).

$$|x - 2| = a + 1 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x - 2 = a + 1 \\ x - 2 = -a - 1 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x = a + 3 \\ x = 1 - a \end{cases}$$

Получаем два случая:

$$1) \quad (a + 3)^2 - 4a - 12 + 1 - a = 0$$

$$a^2 + 6a + 9 - 4a - 11 = 0$$

$$a^2 + a - 2 = 0$$

$$a = 1; -2$$

При $a = 1$:

Первое уравнение имеет корни 0 и 4, второе 4 и 0, т.е. условие задачи не выполняется.

При $a = -2$:

Первое уравнение имеет корни 3 и 1, второе 1 и 3, т.е. условие задачи не выполняется.

$$2) \quad (1 - a)^2 - 4 + 4a + 1 - a = 0$$

$$1 - 2a + a^2 - 3 + 3a = 0$$

$$a^2 + a - 2 = 0$$

$$a = 1; -2$$

Получаем то же самое, что и в первом случае.

Делаем единственно возможный вывод, что уравнение (2) должно иметь один корень, а уравнение (1) – два корня, не являющиеся корнями уравнения (2). Это возможно только если

$|x - 2| = 0$ при $a = -1$. Тогда первое уравнение имеет два корня $\frac{4 \pm \sqrt{8}}{2} = 2 \pm \sqrt{2}$, а второе один корень $x = 2$.

Ответ: $a = -1$

Тренировочная работа №2 С5

Найдите все значения a , при каждом из которых система $\begin{cases} y - x^2 = a \\ x - y^2 = a \end{cases}$ имеет ровно два решения.

Найдем разность уравнения системы.

$$(y - x) + (y - x)(y + x) = 0$$

$$(y - x)(y + x + 1) = 0$$

$$\begin{cases} y = x \\ y = -x - 1 \end{cases}$$

Если $y = x$, то оба уравнения системы имеют вид $x^2 - x + a = 0$.

Если $y = -x - 1$, то оба уравнения системы имеют вид $x^2 + x + 1 + a = 0$.

Корни имеют вид $\frac{1 \pm \sqrt{1 - 4a}}{2}$ и $\frac{-1 \pm \sqrt{-3 - 4a}}{2}$

Система имеет два решения в следующих случаях:

1) уравнения имеют по одному корню (их дискриминанты равны нулю)

$$\begin{cases} 1 - 4a = 0 \\ 1 - 4 - 4a = 0 \end{cases}, \text{ получается противоречие}$$

$$2) \begin{cases} 1 - 4a > 0 \\ -3 - 4a < 0 \end{cases} \begin{cases} a < \frac{1}{4} \\ a > -\frac{3}{4} \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} 1 - 4a < 0 \\ -3 - 4a > 0 \end{cases} \begin{cases} a > \frac{1}{4} \\ a < -\frac{3}{4} \end{cases}, \text{ что невозможно.}$$

4) Первое уравнение имеет 2 корня, а второе – 1, который совпадает с одним из корней первого.

$$a = -\frac{3}{4}; \quad x = -\frac{1}{2}; \quad x = \frac{3}{2}; -\frac{1}{2}; \text{ - подходит}$$

5) Первое имеет один корень, а второе – 2, при этом тоже есть совпадающие корни.

$$a = \frac{1}{4}; \quad x = \frac{1}{2}; \text{, а вот второе уравнение корней иметь не будет.}$$

$$\text{Ответ: } -\frac{3}{4} \leq a < \frac{1}{4}$$