Вариант 2 С5

Найдите все значения *a*, при каждом из которых система $\begin{cases}(x-a)(ax-2a-3)\geq 0\\ ax\geq 4\end{cases}$ не имеет решений.

Видно, что при *a* = 0 система решений не имеет.

Рассмотрим теперь случай $a>0$.

$$\begin{cases}(x-a)\left(x-\dfrac{2a+3}{a}\right)\geq 0\\ x\geq \dfrac{4}{a}\end{cases}$$

Решением первого неравенства будет объединение двух неограниченных промежутков, поэтому второе неравенство тоже будет иметь решения, т.е. этот случай не удовлетворяет условию задачи.

Теперь второй случай $a<0$.

$$\begin{cases}(x-a)\left(x-\dfrac{2a+3}{a}\right)\leq 0\\ x\leq \dfrac{4}{a}\end{cases}$$

Система не будет иметь решений, если $\dfrac{4}{a}$ будет меньше наименьшего из чисел a и $\dfrac{2a+3}{a}$.

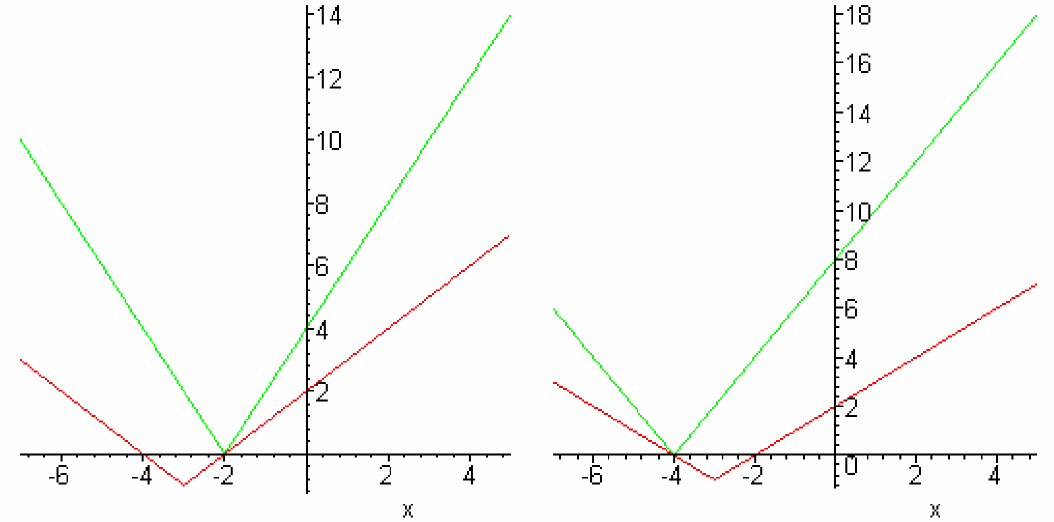
Имеем: $\begin{cases}\dfrac{4}{a}<a\\ \dfrac{4}{a}<\dfrac{2a+3}{a}\end{cases}$ $\begin{cases}a^2-4<0\\ 2a<1\end{cases}$ $a\in\left(-2;\dfrac{1}{2}\right)$, с учетом условия $a<0$ получаем: $a\in(-2;0)$, еще вспомним про случай а = 0.

Ответ: $a\in(-2;0]$

Вариант 3 С5

Найдите все значения *а*, такие, что уравнение $|x+3|-1=|2x-a|$ имеет единственное решение.

Решим с помощью графиков.



Для выполнения условия задачи вершина графика правой части уравнения должна находиться в точке x = -2 или x = -4.

Т.е. $\left[\begin{array}{l} -4-a=0 \\ -8-a=0 \end{array}\right. \quad \rightarrow \quad \left[\begin{array}{l} a=-4 \\ a=-8 \end{array}\right.$

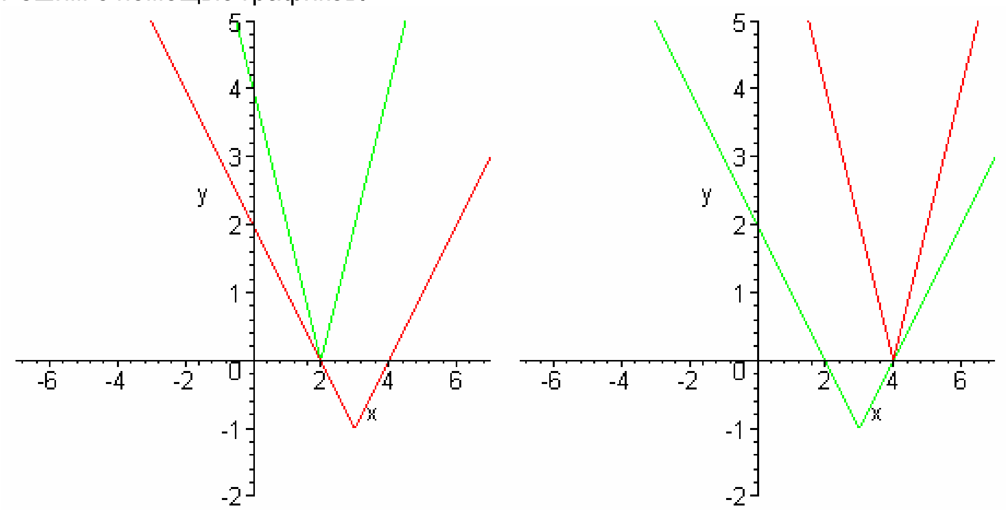
Ответ: -4 и -8

Вариант 4 С5

Найдите все значения *a*, такие, при каждом из которых уравнение $1 = |x-3| - |2x+a|$ имеет единственное решение.

$|2x+a| = |x-3| - 1$

Решим с помощью графиков.



Для выполнения условия задачи вершина графика левой части уравнения должна находиться в точке x = 2 или x = 4.

Т.е. $\left[\begin{array}{l} 4+a=0 \\ 8+a=0 \end{array}\right. \quad \rightarrow \quad \left[\begin{array}{l} a=-4 \\ a=-8 \end{array}\right.$

Ответ: -4 и -8

http://alexlarin.narod.ru

Вариант 5 С5

Найдите все значения *a*, при каждом из которых уравнение

$4x-\left|3x-|x+a|\right|=9|x-3|$

имеет хотя бы два корень.

Рассмотрим функции

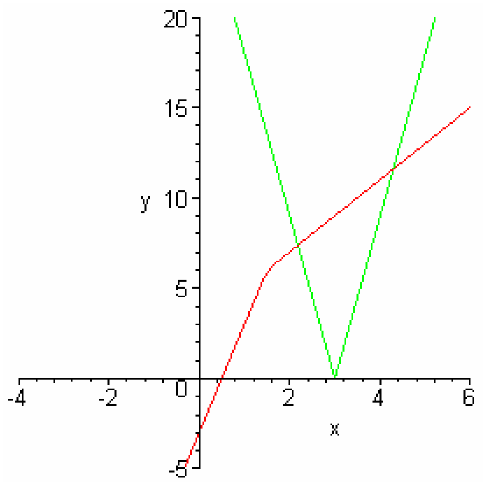
$f(x)=4x-\left|3x-|x+a|\right|$ и $g(x)=9|x-3|$

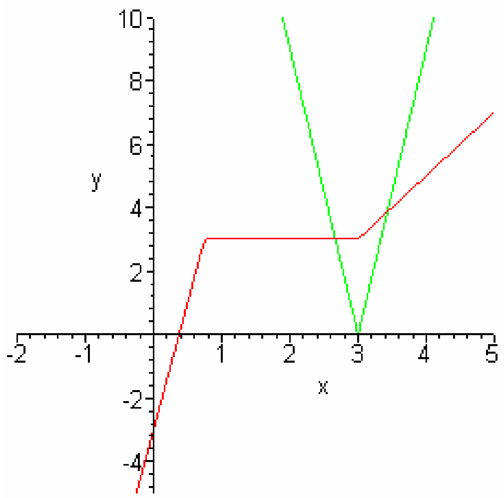
1. $x \ge -a \quad \to \quad f(x)=4x-|2x-a|=\begin{cases} 6x-a, & x \le \dfrac{a}{2} \\ 2x+a, & x > \dfrac{a}{2} \end{cases}$

2. $x < -a \quad \to \quad f(x)=4x-|4x+a|=\begin{cases} 8x-a, & x \le -\dfrac{a}{4} \\ -a, & x > -\dfrac{a}{4} \end{cases}$

Заметим, что угловой коэффициент ломаной $g(x)$ равен 9 или -9, а ломаной $f(x)$ 2, 6 или 8 при $a>0$ и 0, 8 и 2 при $a<0$

На первом рисунке $a>0$, на втором - $a<0$





Для выполнения условия задачи необходимо:

$f(3)=12-\left|9-|a+3|\right|>0$

$\left|9-|a+3|\right|<12 \quad \to \quad -12<9-|a+3|<12 \quad \to \quad -3<|a+3|<21$

$-21<a+3<21 \quad \to \quad -24<a<18$

Ответ: $-24<a<18$

http://alexlarin.narod.ru

Вариант 6 С5

Найти все значения *а*, такие, что наименьшее значение функции

$$\left|x^2-(1+a)x+a\right|+(a-1)\left|x+1\right| \text{ меньше 2.}$$

$$f(x)=\left|x^2-(1+a)x+a\right|+(a-1)\left|x+1\right|=\left|x^2-x-ax+a\right|+(a-1)\left|x+1\right|=$$
$$=\left|(x-1)(x-a)\right|+(a-1)\left|x+1\right|$$

Возможные варианты раскрытия модулей:

$$f(x)=x^2-x-ax+a+ax+a-x-1=x^2-2x+2a-1$$
$$f(x)=x^2-x-ax+a-ax-a+x+1=x^2-2ax+1$$
$$f(x)=-x^2+x+ax-a+ax+a-x-1=-x^2+2ax-1$$
$$f(x)=-x^2+x+ax-a-ax-a+x+1=-x^2+2x-2a+1$$

Наименьшее значение может быть либо в граничных точках $x=1, x=a, x=-1$, либо в вершинах парабол, т.е. опять же при $x=1$ или $x=a$.

$$\left[\begin{array}{l} f(1)<2 \\ f(-1)<2 \\ f(a)<2 \end{array}\right. \rightarrow \left[\begin{array}{l} 2(a-1)<2 \\ 2\left|1+a\right|<2 \\ (a-1)\left|a+1\right|<2 \end{array}\right. \rightarrow \left[\begin{array}{l} a<2 \\ -1<a+1<1 \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a^2-1<2 \\ a>-1 \end{cases} \\ \begin{cases} a^2-1>-2 \\ a<-1 \end{cases} \end{array}\right. \end{array}\right. \rightarrow \left[\begin{array}{l} a<2 \\ -2<a<0 \\ -1<a<\sqrt{3} \\ a<-1 \end{array}\right. \rightarrow \quad a<2$$

Итого $a<2$

http://alexlarin.narod.ru

Вариант 7 С5

Найдите все значения *а*, при каждом из которых из неравенства $0 \le x \le 1$ следует неравенство $\left(a^2 + a - 2\right)x^2 - (a+5)x - 2 \le 0.$

По условию задачи все решения первого неравенства должны быть решениями второго.

Обозначим $f(x) = \left(a^2 + a - 2\right)x^2 - (a+5)x - 2$

Сначала рассмотрим случай, если ветви параболы направлены вверх:

$\begin{cases} f(0) \le 0 \\ f(1) \le 0 \\ a^2 + a - 2 > 0 \end{cases}$ $\begin{cases} -2 \le 0 \\ a^2 + a - 2 - a - 5 - 2 \le 0 \\ a < -2;\ a > 1 \end{cases}$

$\begin{cases} a^2 - 9 \le 0 \\ a < -2;\ a > 1 \end{cases} \rightarrow \quad a \in [-3;-2) \cup (1;3]$

Если ветви параболы направлены вниз $a \in (-2;1)$.

Заметим, что $f(0) = -2 < 0$.

Кроме того, $D = (a+5)^2 + 8(a^2 + a - 2) = 9a^2 + 18a + 9 = 9(a+1)^2$

Нули функции $f(x)$:

$$x_{1,2} = \frac{a+5+3a+3}{2(a-1)(a+2)};\frac{a+5-3a-3}{2(a-1)(a+2)} = \frac{2}{(a-1)};-\frac{1}{(a+2)}$$

При $a \in (-2;1)$ оба корня отрицательные, таким образом, отрезок $0 \le x \le 1$ целиком попадает на промежуток отрицательных значений функции $f(x)$, т.е. условие задачи выполняется на промежутке $a \in (-2;1)$.

Теперь рассмотрим случай $a^2 + a - 2 = 0 \quad a = -2;1$

Имеем $-3x - 2 \le 0; \quad -6x - 2 \le 0;$

$x \ge -\frac{2}{3}; \quad x \ge -\frac{1}{3}$ - условие задачи выполнено

Ответ: $a \in [-3;3]$

aalleexx

Вариант 8 С5

Найдите все значения *а*, при каждом из которых уравнение $cos\left(\sqrt{a^2-x^2}\right)=1$ имеет ровно 10 решений.

$$\sqrt{a^2-x^2}=2\pi n \quad n\in Z$$
$$a^2-x^2=4\pi^2n^2 \quad n\in Z$$
$$x^2=a^2-4\pi^2n^2 \quad n\in Z$$
$$x^2=a^2-4\pi^2n^2=a^2;a^2-4\pi^2;a^2-16\pi^2;a^2-36\pi^2;a^2-64\pi^2-\text{должны}$$
$$\text{давать десять искомых корней}$$
$$\text{Необходимо чтобы } a^2-64\pi^2>0, a^2-100\pi^2<0$$
$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}a>8\pi\\ a<-8\pi\end{array}\right. \\ -10\pi<a<10\pi\end{cases} \Rightarrow a\in(-10\pi;-8\pi)\cup(8\pi;10\pi)$$

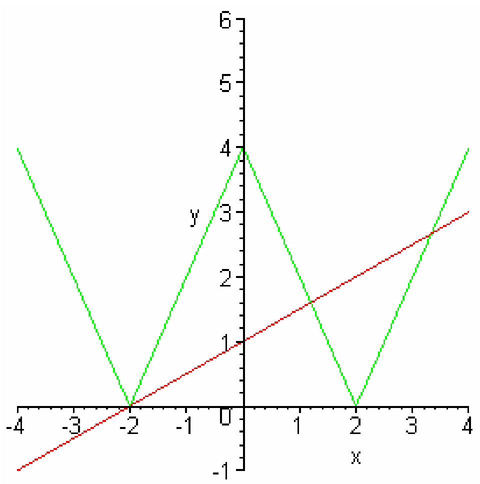
Ответ: $a\in(-10\pi;-8\pi)\cup(8\pi;10\pi)$

http://alexlarin.narod.ru

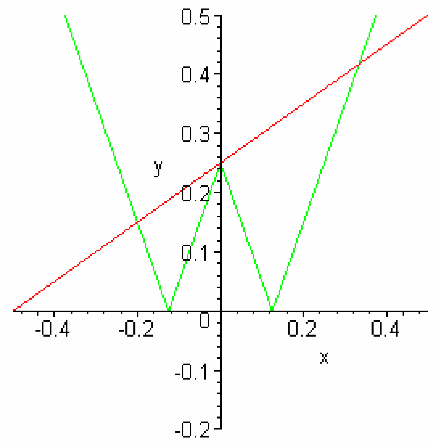
Вариант 9 С5

Найдите все значения *а*, при каждом из которых уравнение $2\left|2|x|-a^2\right|=x-a$ имеет три различных корня.

$\left|2|x|-a^2\right|=\frac{x}{2}-\frac{a}{2}$ - решать будем графически



$a=-2$



$a=-\frac{1}{2}$

Для выполнения условия задачи значения левой и правой части должны быть равны при $x=0$ и $x=-\frac{a^2}{2}$;

$$\begin{cases} a^2=-\frac{a}{2} \\ -\frac{a^2}{4}-\frac{a}{2}=0 \end{cases} \to \begin{cases} a=0; a=-\frac{1}{2} \\ a=0; a=-2 \end{cases}$$

При $a=0$ условие не выполняется.

Ответ: $a=-2$; $a=-\frac{1}{2}$.

http://alexlarin.narod.ru

Вариант №10 С5

Найти все значения *a*, при каждом из которых множество значений функции

$f(x)=\dfrac{x^2-ax+1}{x^2+x+1}$ лежит на интервале (-3;3).

$-3<\dfrac{x^2-ax+1}{x^2+x+1}<3$, заметим, что $x^2+x+1>0$ при любом *x*.

Получаем:

$$\begin{cases}\dfrac{x^2-ax+1}{x^2+x+1}<3\\ \dfrac{x^2-ax+1}{x^2+x+1}>-3\end{cases}\rightarrow\begin{cases}x^2-ax+1<3x^2+3x+3\\ x^2-ax+1>-3x^2-3x-3\end{cases}\rightarrow\begin{cases}3x^2+(3+a)x+2>0\\ 4x^2+(3-a)x+4>0\end{cases}$$

Т.к. неравенства должны выполняться при любом *x*, получаем:

$$\begin{cases}(3+a)^2-16<0\\ (3-a)^2-64<0\end{cases}\rightarrow\begin{cases}-4<3+a<4\\ -8<3-a<8\end{cases}\rightarrow\begin{cases}-7<a<1\\ -5<a<11\end{cases}\rightarrow\quad a\in(-5;1)$$

Ответ: $a\in(-5;1)$