Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

C1 Решить систему уравнений
$$\begin{cases} 16^{\cos x} - 10 \cdot 4^{\cos x} + 16 = 0, \\ \sqrt{y} + 2\sin x = 0. \end{cases}$$

Решение. Сделаем замену $z = 4^{\cos x}$. Первое уравнение принимает вид $z^2 - 10z + 16 = 0$, откуда $z = 2$ или $z = 8$. Следовательно, $\cos x = \frac{1}{2}$ или $\cos x = \frac{3}{2}$.

Уравнение $\cos x = \frac{3}{2}$ решений не имеет, а из уравнения $\cos x = \frac{1}{2}$ получаем: $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in Z$. Из второго уравнения следует, что $\sin x \le 0$, поэтому $x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k$, и $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Из второго уравнения при этом получаем: $\sqrt{y} - \sqrt{3} = 0$, откуда $y = 3$.

Ответ: $\left(-\frac{\pi}{3} + 2\pi k;\ 3\right),\ k \in Z$.

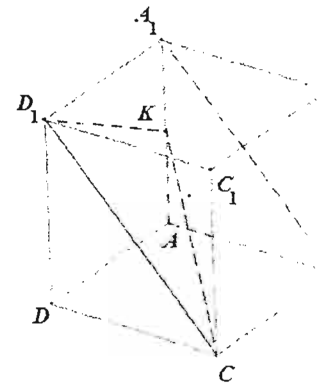
Содержание критерия	Балл
Обоснованно получен верный ответ.	2
Первое уравнение решено верно, но в решении системы имеются ошибки.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведенных выше.	0

C2 Точка K – середина ребра AA_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите угол между прямыми A_1B и CK.

Решение.

Прямая A_1B параллельна прямой CD_1. Значит, угол KCD_1 искомый.

Рассмотрим треугольник KCD_1. Если принять длину ребра куба за единицу, то $CD_1 = \sqrt{2}$, $KD_1 = \frac{\sqrt{5}}{2}$ и $CK = \sqrt{2 + \frac{1}{4}} = \frac{3}{2}$.



Из теоремы косинусов следует:
$$\cos\angle KCD_1 = \frac{2 + \frac{9}{4} - \frac{5}{4}}{2 \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{3}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Значит, искомый угол равен 45°.

Ответ: 45°.

Содержание критерия	Б
Обоснованно получен верный ответ.	
Найден плоский угол, равный искомому углу. Ход решения верный, решение содержит вычислительную ошибку, возможно, приведшую к неверному ответу или отсутствию ответа.	
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведенных выше.	

C3 Решите неравенство $\log_2\sqrt{7-2x} \cdot \log_x 2 \le 1$.

Решение. В области допустимых значений: $0 < x < 1$, $1 < x < \frac{7}{2}$ и

$\frac{\log_2\sqrt{7-2x}}{\log_2 x} \le 1$; $\frac{\log_2\sqrt{7-2x} - \log_2 x}{\log_2 x} \le 0$.

Значит, $\begin{cases} \log_2\sqrt{7-2x} - \log_2 x \ge 0, \\ \log_2 x < 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} \log_2\sqrt{7-2x} - \log_2 x \le 0, \\ \log_2 x > 0. \end{cases}$

Поэтому $\begin{cases} \frac{\sqrt{7-2x}}{x} \ge 1, \\ x < 1 \end{cases}$ или $\begin{cases} \frac{\sqrt{7-2x}}{x} \le 1, \\ x > 1. \end{cases}$

Решая эти системы, получаем: $0 < x < 1$, $2\sqrt{2} - 1 \le x < \frac{7}{2}$.

Ответ: $(0; 1)$, $\left[2\sqrt{2} - 1;\ \frac{7}{2}\right)$.

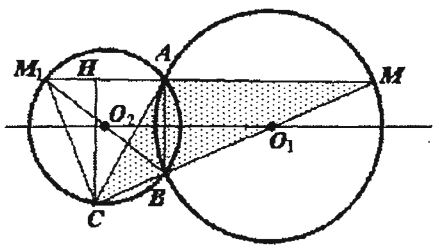
Содержание критерия	Балл
Обоснованно получен верный ответ.	3
Ответ отличается от верного конечным числом точек.	2
Ответ содержит лишние промежутки или один из промежутков решения потерян.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведенных выше.	0

C4 Две окружности радиусов $\sqrt{10}$ и $\sqrt{5}$ имеют общую хорду AB, длина которой равна 2. Через точку B проведен диаметр BM большей окружности, причём прямая BM вторично пересекает меньшую окружность в точке C. Найдите площадь треугольника ACM.

Решение.

Обозначим радиусы R и r, а половину длины хорды a.

1) Пусть центры O_1, O_2 окружностей расположены в разных полуплоскостях относительно прямой AB. В силу симметрии окружностей относительно линии их центров имеем: $O_1O_2 \perp AB$, и поскольку BM – диаметр, то $\angle BAM = 90°$. Значит, $O_1O_2 \parallel AM$.



Пусть прямая AM вторично пересекает окружность с центром O_2 в точке M_1. Тогда $\angle BAM_1 = 90°$ и поэтому BM_1 – диаметр. Следовательно, $\angle BCM_1 = 90°$.

Четырёхугольник $ABCM_1$ – вписанный и поэтому $\angle AM_1C + \angle ABC = 180°$. $\angle ABM + \angle ABC = 180°$. Отсюда $\angle AM_1C = \angle ABM$.

Из прямоугольного треугольника ABM находим:

$$\sin\angle AM_1C = \sin\angle ABM = \sqrt{1-\frac{a^2}{R^2}},\quad \sin\angle AMB = \frac{a}{R};\quad AM = 2\sqrt{R^2-a^2}\text{ и,}$$

аналогично, из прямоугольного треугольника ABM_1: $AM_1 = 2\sqrt{r^2-a^2}$.

Следовательно, $CM_1 = MM_1 \cdot \sin\angle AMB = \frac{2a}{R}\left(\sqrt{R^2-a^2}+\sqrt{r^2-a^2}\right)$.

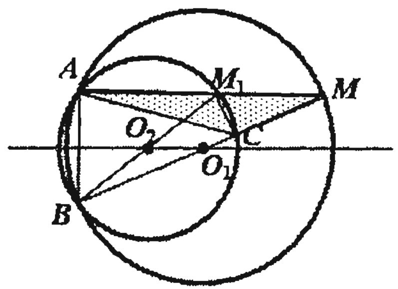
В треугольнике AMC:

$$CH = CM_1 \cdot \sin\angle AM_1C = \frac{2a}{R}\left(\sqrt{R^2-a^2}+\sqrt{r^2-a^2}\right)\sqrt{1-\frac{a^2}{R^2}} = \frac{2a\sqrt{R^2-a^2}}{R^2}\left(\sqrt{R^2-a^2}+\sqrt{r^2-a^2}\right).$$

Теперь найдем площадь S треугольника AMC:

$$S = \frac{2a\left(R^2-a^2\right)}{R^2}\left(\sqrt{R^2-a^2}+\sqrt{r^2-a^2}\right).$$

2) Пусть центры O_1, O_2 окружностей расположены в одной полуплос относительно прямой AB.



В этом случае $CM_1 = MM_1 \cdot \sin\angle AMB = \frac{2a}{R}\left(\sqrt{R^2-a^2}-\sqrt{r^2-a^2}\right)$.

В треугольнике AMC:

$$CH = CM_1 \cdot \sin\angle AM_1C = \frac{2a}{R}\left(\sqrt{R^2-a^2}-\sqrt{r^2-a^2}\right)\sqrt{1-\frac{a^2}{R^2}} = \frac{2a\sqrt{R^2-a^2}}{R^2}\left(\sqrt{R^2-a^2}-\sqrt{r^2-a^2}\right).$$

Найдем искомую площадь S треугольника AMC:

$$S = \frac{2a\left(R^2-a^2\right)}{R^2}\left(\sqrt{R^2-a^2}-\sqrt{r^2-a^2}\right).$$

ıя $R = \sqrt{10}$, $r = \sqrt{5}$, $a = 1$, получим: $S = \frac{9}{5}$ или $S = 9$,

ıли 9.

Содержание критерия	Балл
о обоснованное решение и получен полный ответ.	3
:смотрены оба случая. Получено верное значение искомой (для одного из них. Другое отсутствует или неверно из-за ельной ошибки.	2
рассмотрена одна из возможных геометрических ций. Получено верное значение искомой величины в этом	1
:няется ни один из критериев на 1–3 балла.	0

Іайти все значения параметра a, при каждом из которых во иножестве решений неравенства $21x+|3x-a|\le 4a-x$ нет целых юложительных чисел.

э. 1) $21x+|3x-a|\le 4a-x$; $|3x-a|\le 4a-22x$; $\begin{cases} 3x-a\le 4a-22x, \\ 3x-a\ge 22x-4a; \end{cases}$

ı, ɛ; $\begin{cases} x\le \frac{a}{5}, \\ x\le \frac{3a}{19}. \end{cases}$ (*)

$a \le 0$, то во множестве решений данного неравенства кительных чисел.

> 0, то система (*) равносильна неравенству $x \le \frac{3a}{19}$. Во множестве

нет целых положительных чисел только если $0 < \frac{3a}{19} < 1$. Откуда

искомые значения a: $a < \frac{19}{3}$.

$< \frac{19}{3}$.

Содержание критерия	Балл
Обоснованно получен верный ответ	4
Обоснованно получен ответ, отличающийся, вследствие арифметической или логической ошибки, от верного ответа лишь конечным числом точек.	3
Указаны (без обоснований) необходимые и достаточные условия выполнения условий задачи, но вычисления содержат ошибки, в результате которых получен неверный ответ.	2
Найдено (без обоснований) значение параметра, удовлетворяющее условию задачи.	1
Решение не соответствует ни одному из перечисленных выше критериев.	0

C6 Найдите все натуральные числа, меньшие, чем 100000, которые делятся на 1999 и у которых сумма их десятичных цифр равна 25.

Решение.

Искомые числа имеют вид: $1999n$, где $n = 1, 2, \ldots, 50$. Натуральное число и сумма его цифр дают один и тот же остаток при делении на 9.

$$25 = 2\cdot 9 + 7;\ 1999 = 222\cdot 9 + 1.$$

Значит, n может равняться одному из чисел $7, 16, 25, 34, 43$. Проверяем, для каких n сумма цифр числа $1999n$ равна 25. Для этого можно воспользоваться равенством $1999n = 2000n - n$. Подходят $n = 7$, $n = 16$.

Ответ: 13993 и 31984.

Содержание критерия	Балл
Обоснованно получен верный ответ.	4
Получен верный ответ, но пропущены некоторые обоснования. Например, проведен неполный перебор всех возможных значений.	3
Получено множество чисел для перебора, возможно с ошибкой в рассуждении, что привело к появлению лишних решений или потере одного из решений.	2
Сделана верная оценка остатка искомых чисел при делении на девять, дальнейшее решение неверно или отсутствует.	1
Решение не соответствует ни одному из перечисленных выше критериев.	0

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

C1 Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 81^{\sin y} - 30 \cdot 9^{\sin y} + 81 = 0, \\ \sqrt{x} + 2\cos y = 0. \end{cases}$$

Решение. Сделаем замену $z = 9^{\sin y}$. Первое уравнение принимает вид $z^2 - 30z + 81 = 0$, откуда $z = 3$ или $z = 27$. Следовательно, $\sin y = \frac{1}{2}$ или $\sin y = \frac{3}{2}$.

Уравнение $\sin y = \frac{3}{2}$ решений не имеет, а из уравнения $\sin y = \frac{1}{2}$ получаем: $y = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in Z$.

Из второго уравнения следует, что $\cos y \le 0$, поэтому $y = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, и $\cos y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Из второго уравнения при этом получаем: $\sqrt{x} - \sqrt{3} = 0$, откуда $x = 3$.

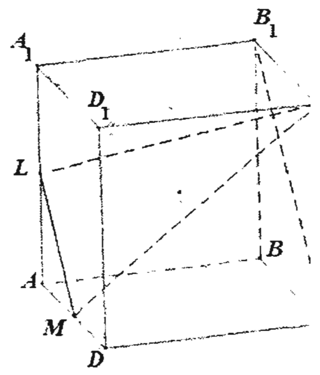
Ответ: $\left(3;\ \frac{5\pi}{6} + 2\pi k\right),\ k \in Z$.

Содержание критерия	Балл
Обоснованно получен верный ответ.	2
Первое уравнение решено верно, но в решении системы имеются ошибки.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведенных выше.	0

C2 Точка M – середина ребра AD куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите угол между прямыми C_1M и B_1C.

Решение.

Если L середина AA_1, то прямая ML параллельна прямой CB_1. Значит, угол LMC_1 искомый. Рассмотрим треугольник MC_1L. Если принять длину ребра куба за единицу, то $ML = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $C_1L = C_1M = \sqrt{1 + 1 + \frac{1}{4}} = \frac{3}{2}$.



Треугольник MC_1L равнобедренный, и $\cos \angle LMC_1 = \frac{\frac{1}{2}LM}{MC_1} = \frac{\sqrt{2} \cdot 2}{4 \cdot 3} = \frac{\sqrt{2}}{6}$. Значит, искомый угол равен $\arccos\frac{\sqrt{2}}{6}$.

Ответ: $\arccos\frac{\sqrt{2}}{6}$.

Содержание критерия	Ба
Обоснованно получен верный ответ.	
Найден плоский угол, равный искомому углу. Ход решения верный, решение содержит вычислительную ошибку, возможно, приведшую к неверному ответу или отсутствию ответа.	
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведенных выше.	

C3 Решите неравенство $\log_3\sqrt{5 - 2x} \cdot \log_x 3 < 1$.

Решение.

В области допустимых значений $0 < x < 1$, $1 < x < \frac{5}{2}$ и

$\frac{\log_3\sqrt{5-2x}}{\log_3 x} < 1$; $\frac{\log_3\sqrt{5-2x} - \log_3 x}{\log_3 x} < 0$.

Значит, $\begin{cases} \log_3\sqrt{5-2x} - \log_3 x > 0, \\ \log_3 x < 0 \end{cases}$ $\begin{cases} \log_3\sqrt{5-2x} - \log_3 x < 0, \\ \log_3 x > 0. \end{cases}$

Поэтому $\begin{cases} \frac{\sqrt{5-2x}}{x} > 1, \\ x < 1 \end{cases}$ или $\begin{cases} \frac{\sqrt{5-2x}}{x} < 1, \\ x > 1. \end{cases}$

Решая эти системы, получаем: $0 < x < 1$, $\sqrt{6} - 1 < x < \frac{5}{2}$.

Ответ: $0 < x < 1$, $\sqrt{6} - 1 < x < \frac{5}{2}$.

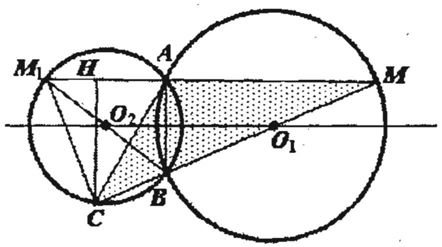
Содержание критерия	Балл
Обоснованно получен верный ответ.	3
Ответ отличается от верного конечным числом точек.	2
Ответ содержит лишние промежутки или один из промежутков решения потерян.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведенных выше.	0

C4 Две окружности радиусов $\sqrt{5}$ и $\sqrt{17}$ имеют общую хорду AB, длина которой равна 2. Через точку B проведен диаметр BM большей окружности, причём прямая BM вторично пересекает меньшую окружность в точке C. Найдите площадь треугольника ACM.

Решение.

Обозначим радиусы R и r, а половину длины хорды a.

1) Пусть центры O_1, O_2 окружностей расположены в разных полуплоскостях относительно прямой AB. В силу симметрии окружностей относительно линии их центров имеем: $O_1O_2 \perp AB$, и поскольку BM – диаметр, то $\angle BAM = 90°$. Значит, $O_1O_2 \parallel AM$.



Пусть прямая AM вторично пересекает окружность с центром O_2 в точке M_1. Тогда $\angle BAM_1 = 90°$ и поэтому BM_1 – диаметр. Следовательно, $\angle BCM_1 = 90°$.

Четырёхугольник $ABCM_1$ – вписанный и поэтому $\angle AM_1C + \angle ABC = 180°$. $\angle ABM + \angle ABC = 180°$. Отсюда $\angle AM_1C = \angle ABM$.

Из прямоугольного треугольника ABM находим:

$\sin \angle AM_1C = \sin \angle ABM = \sqrt{1 - \frac{a^2}{R^2}}$, $\sin \angle AMB = \frac{a}{R}$; $AM = 2\sqrt{R^2 - a^2}$

и, аналогично, из прямоугольного треугольника ABM_1: $AM_1 = 2\sqrt{r^2 - a^2}$.

Следовательно, $CM_1 = MM_1 \cdot \sin \angle AMB = \frac{2a}{R}\left(\sqrt{R^2 - a^2} + \sqrt{r^2 - a^2}\right)$.

В треугольнике AMC:

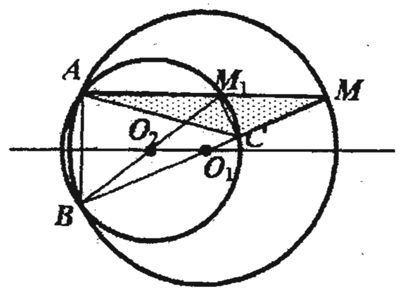
$$CH = CM_1 \cdot \sin \angle AM_1C = \frac{2a}{R}\left(\sqrt{R^2 - a^2} + \sqrt{r^2 - a^2}\right)\sqrt{1 - \frac{a^2}{R^2}} =$$

$$= \frac{2a\sqrt{R^2 - a^2}}{R^2}\left(\sqrt{R^2 - a^2} + \sqrt{r^2 - a^2}\right).$$

Теперь найдем площадь S треугольника AMC:

$$S = \frac{2a\left(R^2 - a^2\right)}{R^2}\left(\sqrt{R^2 - a^2} + \sqrt{r^2 - a^2}\right).$$

2) Пусть теперь центры O_1, O_2 окружностей расположены в о полуплоскости относительно прямой AB.



В этом случае $CM_1 = MM_1 \cdot \sin \angle AMB = \frac{2a}{R}\left(\sqrt{R^2 - a^2} - \sqrt{r^2 - a^2}\right)$.

В треугольнике AMC:

$$CH = CM_1 \cdot \sin \angle AM_1C = \frac{2a}{R}\left(\sqrt{R^2 - a^2} - \sqrt{r^2 - a^2}\right)\sqrt{1 - \frac{a^2}{R^2}} =$$

$$= \frac{2a\sqrt{R^2 - a^2}}{R^2}\left(\sqrt{R^2 - a^2} - \sqrt{r^2 - a^2}\right).$$

Найдем площадь S треугольника AMC:

$$S = \frac{2a\left(R^2 - a^2\right)}{R^2}\left(\sqrt{R^2 - a^2} - \sqrt{r^2 - a^2}\right).$$

Подставляя $R = \sqrt{17}$, $r = \sqrt{5}$, $a = 1$, получим: $S = \frac{64}{17}$ или $S = \frac{192}{17}$.

Ответ: $\frac{64}{17}$ или $\frac{192}{17}$.

Содержание критерия	Балл
Приведено обоснованное решение и получен полный ответ.	3
Верно рассмотрены оба случая. Получено верное значение искомой величины для одного из них. Другое отсутствует или неверно из-за вычислительной ошибки.	2
Верно рассмотрена одна из возможных геометрических конструкций. Получено верное значение искомой величины в этом случае.	1
Не выполняется ни один из критериев на 1–3 балла.	0

C5 Найти все значения параметра a, при каждом из которых во множестве решений неравенства $21x+|3x+3-a|<4a-x-22$ нет целых положительных чисел.

Решение.

1) $21x+|3x+3-a|<4a-x-22;$ $|3x+3-a|<4a-22x-22;$

$$\begin{cases}3x+3-a<4a-22x-22,\\3x+3-a>22x-4a;\end{cases}\quad\begin{cases}5a>25x+25,\\3a>19x+19;\end{cases}\quad\begin{cases}x<\frac{a}{5}-1,\\x<\frac{3a}{19}-1.\end{cases}\quad(*)$$

2) Если $a\le0$, то во множестве решений данного неравенства нет положительных чисел.

3) Если $a>0$, то система (*) равносильна неравенству $x<\frac{3a}{19}-1$. Во множестве $\left(-\infty;\frac{3a}{19}-1\right)$ нет целых положительных чисел только если $\frac{3a}{19}\le2$, откуда $a\le\frac{38}{3}$.

Ответ: $a\le\frac{38}{3}$.

Содержание критерия
Обоснованно получен верный ответ.
Обоснованно получен ответ, отличающийся, вследствие арифметической или логической ошибки, от верного ответа лишь конечным числом точек.
Указаны (без обоснований) необходимые и достаточные условия выполнения условий задачи, но вычисления содержат ошибки, в результате которых получен неверный ответ.
Найдено (без обоснований) значение параметра, удовлетворяющее условию задачи.
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.

C6 Найдите все натуральные числа, меньшие, чем 100000, ко делятся на 1999 и у которых сумма их десятичных цифр равн

Решение.

Искомые числа имеют вид: $1999n$, где $n=1,2,...,50$. Натуральное ч сумма его цифр дают один и тот же остаток при делении на 9.

$$25=2\cdot9+7;\ 1999=222\cdot9+1.$$

Значит, n может равняться одному из чисел $7,16,25,34,43$. Проверяе каких n сумма цифр числа $1999n$ равна 25. Для этого воспользоваться равенством $1999n=2000n-n$. Подходят $n=7$, $n=16$

Ответ: 13993 и 31984.

Содержание критерия
Обоснованно получен верный ответ.
Получен верный ответ, но пропущены некоторые обоснования. Например, проведен неполный перебор всех возможных значений.
Получено множество чисел для перебора, возможно с ошибкой в рассуждении, что привело к появлению лишних решений или потере одного из решений.
Сделана верная оценка остатка искомых чисел при делении на девять, дальнейшее решение неверно или отсутствует.
Решение не соответствует ни одному из перечисленных выше критериев.

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

C1 Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 16^{\cos x} - 10 \cdot 4^{\cos x} + 16 = 0, \\ \sqrt{y} + 2\sin x = 0. \end{cases}$$

Решение. Сделаем замену $z = 4^{\cos x}$. Первое уравнение принимает вид $z^2 - 10z + 16 = 0$, откуда $z = 2$ или $z = 8$. Следовательно, $\cos x = \frac{1}{2}$ или $\cos x = \frac{3}{2}$.

Уравнение $\cos x = \frac{3}{2}$ решений не имеет, а из уравнения $\cos x = \frac{1}{2}$ получаем: $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ \ k \in Z$. Из второго уравнения следует, что $\sin x \le 0$, поэтому $x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k$, и $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Из второго уравнения при этом получаем: $\sqrt{y} - \sqrt{3} = 0$, откуда $y = 3$.

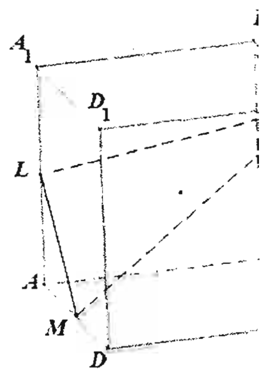
Ответ: $\left(-\frac{\pi}{3} + 2\pi k;\ 3\right)$, $k \in Z$.

Содержание критерия	Балл
Обоснованно получен верный ответ.	2
Первое уравнение решено верно, но в решении системы имеются ошибки.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведенных выше.	0

C2 Точка M – середина ребра AD куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите угол между прямыми C_1M и B_1C.

Решение.

Если L середина AA_1, то прямая ML параллельна прямой CB_1. Значит, угол LMC_1 искомый. Рассмотрим треугольник MC_1L. Если принять длину ребра куба за единицу, то $ML = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $C_1L = C_1M = \sqrt{1 + 1 + \frac{1}{4}} = \frac{3}{2}$.



Треугольник MC_1L равнобедренный, и $\cos\angle LMC_1 = \frac{\frac{1}{2}LM}{MC_1} = \frac{\sqrt{2} \cdot 2}{4 \cdot 3} = \frac{\sqrt{2}}{6}$. Значит, искомый угол равен $\arccos\frac{\sqrt{2}}{6}$.

Ответ: $\arccos\frac{\sqrt{2}}{6}$.

Содержание критерия
Обоснованно получен верный ответ.
Найден плоский угол, равный искомому углу. Ход решения верный решение содержит вычислительную ошибку, возможно, приведшу к неверному ответу или отсутствию ответа.
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведенных выше.

C3 Решите неравенство $\log_2\sqrt{7-2x} \cdot \log_x 2 \le 1$.

Решение. В области допустимых значений: $0 < x < 1$, $1 < x < \frac{7}{2}$

$\frac{\log_2\sqrt{7-2x}}{\log_2 x} \le 1$; $\frac{\log_2\sqrt{7-2x} - \log_2 x}{\log_2 x} \le 0$.

Значит, $\begin{cases} \log_2\sqrt{7-2x} - \log_2 x \ge 0, \\ \log_2 x < 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} \log_2\sqrt{7-2x} - \log_2 x \le 0, \\ \log_2 x > 0. \end{cases}$

Поэтому $\begin{cases} \frac{\sqrt{7-2x}}{x} \ge 1, \\ x < 1 \end{cases}$ или $\begin{cases} \frac{\sqrt{7-2x}}{x} \le 1, \\ x > 1. \end{cases}$

Решая эти системы, получаем: $0 < x < 1$, $2\sqrt{2} - 1 \le x < \frac{7}{2}$.

Ответ: $(0; 1)$, $\left[2\sqrt{2} - 1;\ \frac{7}{2}\right)$.

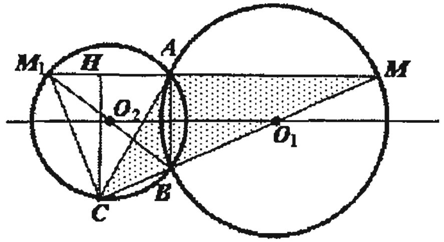
Содержание критерия	Балл
Обоснованно получен верный ответ.	3
Ответ отличается от верного конечным числом точек.	2
Ответ содержит лишние промежутки или один из промежутков решения потерян.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведенных выше.	0

C4 Две окружности радиусов $\sqrt{5}$ и $\sqrt{17}$ имеют общую хорду AB, длина которой равна 2. Через точку B проведен диаметр BM большей окружности, причём прямая BM вторично пересекает меньшую окружность в точке C. Найдите площадь треугольника ACM.

Решение.

Обозначим радиусы R и r, а половину длины хорды a.

1) Пусть центры O_1, O_2 окружностей расположены в разных полуплоскостях относительно прямой AB. В силу симметрии окружностей относительно линии их центров имеем: $O_1O_2 \perp AB$, и поскольку BM – диаметр, то $\angle BAM = 90^\circ$. Значит, $O_1O_2 \parallel AM$.



Пусть прямая AM вторично пересекает окружность с центром O_2 в точке M_1. Тогда $\angle BAM_1 = 90^\circ$ и поэтому BM_1 – диаметр. Следовательно, $\angle BCM_1 = 90^\circ$.

Четырёхугольник $ABCM_1$ – вписанный и поэтому $\angle AM_1C + \angle ABC = 180^\circ$. $\angle ABM + \angle ABC = 180^\circ$. Отсюда $\angle AM_1C = \angle ABM$.

Из прямоугольного треугольника ABM находим:

$$\sin\angle AM_1C = \sin\angle ABM = \sqrt{1-\frac{a^2}{R^2}},\ \sin\angle AMB = \frac{a}{R};\ AM = 2\sqrt{R^2-a^2}$$

и, аналогично, из прямоугольного треугольника ABM_1: $AM_1 = 2\sqrt{r^2-a^2}$.

Следовательно, $CM_1 = MM_1 \cdot \sin\angle AMB = \frac{2a}{R}\left(\sqrt{R^2-a^2}+\sqrt{r^2-a^2}\right)$.

В треугольнике AMC:

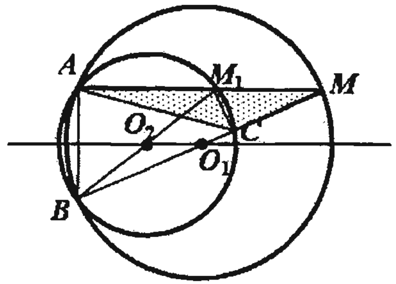
$$CH = CM_1 \cdot \sin\angle AM_1C = \frac{2a}{R}\left(\sqrt{R^2-a^2}+\sqrt{r^2-a^2}\right)\sqrt{1-\frac{a^2}{R^2}} =$$

$$= \frac{2a\sqrt{R^2-a^2}}{R^2}\left(\sqrt{R^2-a^2}+\sqrt{r^2-a^2}\right).$$

Теперь найдем площадь S треугольника AMC:

$$S = \frac{2a\left(R^2-a^2\right)}{R^2}\left(\sqrt{R^2-a^2}+\sqrt{r^2-a^2}\right).$$

2) Пусть теперь центры O_1, O_2 окружностей расположены в одной полуплоскости относительно прямой AB.



В этом случае $CM_1 = MM_1 \cdot \sin\angle AMB = \frac{2a}{R}\left(\sqrt{R^2-a^2}-\sqrt{r^2-a^2}\right)$.

В треугольнике AMC:

$$CH = CM_1 \cdot \sin\angle AM_1C = \frac{2a}{R}\left(\sqrt{R^2-a^2}-\sqrt{r^2-a^2}\right)\sqrt{1-\frac{a^2}{R^2}} =$$

$$= \frac{2a\sqrt{R^2-a^2}}{R^2}\left(\sqrt{R^2-a^2}-\sqrt{r^2-a^2}\right).$$

Найдем площадь S треугольника AMC:

$$S = \frac{2a\left(R^2-a^2\right)}{R^2}\left(\sqrt{R^2-a^2}-\sqrt{r^2-a^2}\right).$$

Подставляя $R = \sqrt{17}$, $r = \sqrt{5}$, $a = 1$, получим: $S = \frac{64}{17}$ или $S = \frac{192}{17}$.

Ответ: $\frac{64}{17}$ или $\frac{192}{17}$.

Содержание критерия	Балл
Приведено обоснованное решение и получен полный ответ.	3
Верно рассмотрены оба случая. Получено верное значение искомой величины для одного из них. Другое отсутствует или неверно из-за вычислительной ошибки.	2
Верно рассмотрена одна из возможных геометрических конструкций. Получено верное значение искомой величины в этом случае.	1
Не выполняется ни один из критериев на 1–3 балла.	0

C5 Найти все значения параметра a, при каждом из которых во множестве решений неравенства $21x+|3x-a|\le 4a-x$ нет целых положительных чисел.

Решение. 1) $21x+|3x-a|\le 4a-x$; $|3x-a|\le 4a-22x$; $\begin{cases}3x-a\le 4a-22x,\\ 3x-a\ge 22x-4a;\end{cases}$

$$\begin{cases}25x\le 5a,\\ 3a\ge 19x;\end{cases}\quad \begin{cases}x\le \frac{a}{5},\\ x\le \frac{3a}{19}.\end{cases}\ (*)$$

2) Если $a\le 0$, то во множестве решений данного неравенства нет положительных чисел.

3) Если $a>0$, то система (*) равносильна неравенству $x\le\frac{3a}{19}$. Во множестве $\left(-\infty;\ \frac{3a}{19}\right]$ нет целых положительных чисел только если $0<\frac{3a}{19}<1$. Откуда находим искомые значения a: $a<\frac{19}{3}$.

Ответ: $a<\frac{19}{3}$.

Содержание критерия
Обоснованно получен верный ответ
Обоснованно получен ответ, отличающийся, вследствие арифметической или логической ошибки, от верного ответа лишь конечным числом точек.
Указаны (без обоснований) необходимые и достаточные услов… выполнения условий задачи, но вычисления содержат ошибки, … результате которых получен неверный ответ.
Найдено (без обоснований) значение параметра, удовлетворяющ… условию задачи.
Решение не соответствует ни одному из перечисленных выше критериев.

C6 Решите уравнение в натуральных числах $n^2+\sigma^2(n)=$ … $\sigma(n)$ – сумма десятичных цифр числа n.

Решение. Очевидно, $n^2=2000-\sigma^2(n)<2000$, поэтому $n\le 44$… что при $n\le 44$ $\sigma(n)\le\sigma(39)=12$.

Откуда: $n^2=2000-\sigma^2(n)\ge 2000-144=1856$.

Поэтому $n\ge\sqrt{1856}$, то есть $n\ge 44$.

Из оценок $n\le 44$ и $n\ge 44$ следует: $n=44$.

Ответ: $n=44$.

Содержание критерия
Обоснованно получен верный ответ.
Получен верный ответ, но пропущены некоторые обоснован… Например, отсутствует нижняя оценка искомого числа и провед… неполный перебор всех возможных значений.
Сделаны обе оценки, возможно, более грубые, что привело … появлению лишних решений.
Сделана хотя бы одна верная оценка искомого числа.
Решение не соответствует ни одному из перечисленных вы… критериев.

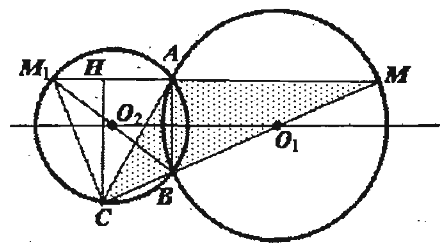
Содержание критерия	Балл
Обоснованно получен верный ответ.	3
Ответ отличается от верного конечным числом точек.	2
Ответ содержит лишние промежутки или один из промежутков решения потерян.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведенных выше.	0

C4 Две окружности радиусов $\sqrt{10}$ и $\sqrt{5}$ имеют общую хорду AB, длина которой равна 2. Через точку B проведен диаметр BM большей окружности, причём прямая BM вторично пересекает меньшую окружность в точке C. Найдите площадь треугольника ACM.

Решение.

Обозначим радиусы R и r, а половину длины хорды a.

1) Пусть центры O_1, O_2 окружностей расположены в разных полуплоскостях относительно прямой AB. В силу симметрии окружностей относительно линии их центров имеем: $O_1O_2 \perp AB$, и поскольку BM – диаметр, то $\angle BAM = 90^\circ$. Значит, $O_1O_2 \parallel AM$.



Пусть прямая AM вторично пересекает окружность с центром O_2 в точке M_1. Тогда $\angle BAM_1 = 90^\circ$ и поэтому BM_1 – диаметр. Следовательно, $\angle BCM_1 = 90^\circ$.

Четырёхугольник $ABCM_1$ – вписанный и поэтому $\angle AM_1C + \angle ABC = 180^\circ$. $\angle ABM + \angle ABC = 180^\circ$. Отсюда $\angle AM_1C = \angle ABM$.

Из прямоугольного треугольника ABM находим:

$$\sin\angle AM_1C = \sin\angle ABM = \sqrt{1-\frac{a^2}{R^2}},\quad \sin\angle AMB = \frac{a}{R};\quad AM = 2\sqrt{R^2-a^2}\text{ и,}$$

аналогично, из прямоугольного треугольника ABM_1: $AM_1 = 2\sqrt{r^2-a^2}$.

Следовательно, $CM_1 = MM_1 \cdot \sin\angle AMB = \frac{2a}{R}\left(\sqrt{R^2-a^2}+\sqrt{r^2-a^2}\right)$

В треугольнике AMC:

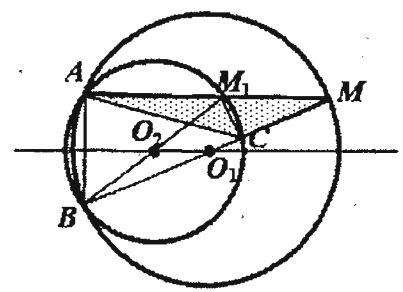
$$CH = CM_1\cdot\sin\angle AM_1C = \frac{2a}{R}\left(\sqrt{R^2-a^2}+\sqrt{r^2-a^2}\right)\sqrt{1-\frac{a^2}{R^2}} =$$

$$= \frac{2a\sqrt{R^2-a^2}}{R^2}\left(\sqrt{R^2-a^2}+\sqrt{r^2-a^2}\right).$$

Теперь найдем площадь S треугольника AMC:

$$S = \frac{2a\left(R^2-a^2\right)}{R^2}\left(\sqrt{R^2-a^2}+\sqrt{r^2-a^2}\right).$$

2) Пусть центры O_1, O_2 окружностей расположены в одной полупл относительно прямой AB.



В этом случае $CM_1 = MM_1\cdot\sin\angle AMB = \frac{2a}{R}\left(\sqrt{R^2-a^2}-\sqrt{r^2-a^2}\right)$

В треугольнике AMC:

$$CH = CM_1\cdot\sin\angle AM_1C = \frac{2a}{R}\left(\sqrt{R^2-a^2}-\sqrt{r^2-a^2}\right)\sqrt{1-\frac{a^2}{R^2}} =$$

$$= \frac{2a\sqrt{R^2-a^2}}{R^2}\left(\sqrt{R^2-a^2}-\sqrt{r^2-a^2}\right).$$

Найдем искомую площадь S треугольника AMC:

$$S = \frac{2a\left(R^2-a^2\right)}{R^2}\left(\sqrt{R^2-a^2}-\sqrt{r^2-a^2}\right).$$

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

C1 Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 81^{\sin y} - 30 \cdot 9^{\sin y} + 81 = 0, \\ \sqrt{x} + 2\cos y = 0. \end{cases}$$

Решение. Сделаем замену $z = 9^{\sin y}$. Первое уравнение принимает вид $z^2 - 30z + 81 = 0$, откуда $z = 3$ или $z = 27$. Следовательно, $\sin y = \frac{1}{2}$ или $\sin y = \frac{3}{2}$.

Уравнение $\sin y = \frac{3}{2}$ решений не имеет, а из уравнения $\sin y = \frac{1}{2}$ получаем: $y = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in Z$.

Из второго уравнения следует, что $\cos y \le 0$, поэтому $y = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, и $\cos y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Из второго уравнения при этом получаем: $\sqrt{x} - \sqrt{3} = 0$, откуда $x = 3$.

Ответ: $\left(3;\ \frac{5\pi}{6} + 2\pi k\right),\ k \in Z$.

Содержание критерия	Балл
Обоснованно получен верный ответ.	2
Первое уравнение решено верно, но в решении системы имеются ошибки.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведенных выше.	0

C2 Точка K – середина ребра AA_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите угол между прямыми A_1B и CK.

Решение.

Прямая A_1B параллельна прямой CD_1. Значит, угол KCD_1 искомый.

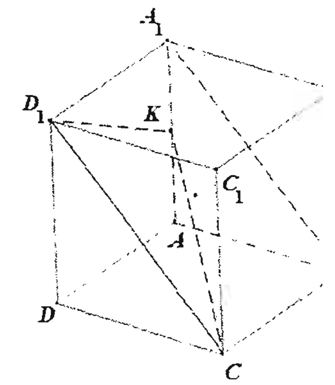
Рассмотрим треугольник KCD_1. Если принять длину ребра куба за единицу, то $CD_1 = \sqrt{2}$, $KD_1 = \frac{\sqrt{5}}{2}$ и $CK = \sqrt{2 + \frac{1}{4}} = \frac{3}{2}$.

Из теоремы косинусов следует:

$$\cos \angle KCD_1 = \frac{2 + \frac{9}{4} - \frac{5}{4}}{2 \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{3}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Значит, искомый угол равен 45°.

Ответ: 45°.



Содержание критерия	Б
Обоснованно получен верный ответ.	
Найден плоский угол, равный искомому углу. Ход решения верный, решение содержит вычислительную ошибку, возможно, приведшую к неверному ответу или отсутствию ответа.	
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведенных выше.	

C3 Решите неравенство $\log_3 \sqrt{5 - 2x} \cdot \log_x 3 < 1$.

Решение.

В области допустимых значений $0 < x < 1,\ 1 < x < \frac{5}{2}$

$\frac{\log_3 \sqrt{5 - 2x}}{\log_3 x} < 1$; $\frac{\log_3 \sqrt{5 - 2x} - \log_3 x}{\log_3 x} < 0$.

Значит, $\begin{cases} \log_3 \sqrt{5 - 2x} - \log_3 x > 0, \\ \log_3 x < 0 \end{cases}$ $\begin{cases} \log_3 \sqrt{5 - 2x} - \log_3 x < 0, \\ \log_3 x > 0. \end{cases}$

Поэтому $\begin{cases} \frac{\sqrt{5 - 2x}}{x} > 1, \\ x < 1 \end{cases}$ или $\begin{cases} \frac{\sqrt{5 - 2x}}{x} < 1, \\ x > 1. \end{cases}$

Решая эти системы, получаем: $0 < x < 1$, $\sqrt{6} - 1 < x < \frac{5}{2}$.

Ответ: $0 < x < 1$, $\sqrt{6} - 1 < x < \frac{5}{2}$.

Подставляя $R = \sqrt{10}$, $r = \sqrt{5}$, $a = 1$, получим: $S = \frac{9}{5}$ или $S = 9$.

Ответ: $\frac{9}{5}$ или 9.

Содержание критерия	Балл
Приведено обоснованное решение и получен полный ответ.	3
Верно рассмотрены оба случая. Получено верное значение искомой величины для одного из них. Другое отсутствует или неверно из-за вычислительной ошибки.	2
Верно рассмотрена одна из возможных геометрических конструкций. Получено верное значение искомой величины в этом случае.	1
Не выполняется ни один из критериев на 1–3 балла.	0

C5 Найти все значения параметра a, при каждом из которых во множестве решений неравенства $21x + |3x + 3 - a| < 4a - x - 22$ нет целых положительных чисел.

Решение.

1) $21x + |3x+3-a| < 4a - x - 22$; $|3x+3-a| < 4a - 22x - 22$;

$$\begin{cases} 3x+3-a < 4a-22x-22, \\ 3x+3-a > 22x-4a; \end{cases} \begin{cases} 5a > 25x+25, \\ 3a > 19x+19; \end{cases} \begin{cases} x < \frac{a}{5} - 1, \\ x < \frac{3a}{19} - 1. \end{cases} \quad (*)$$

2) Если $a \le 0$, то во множестве решений данного неравенства нет положительных чисел.

3) Если $a > 0$, то система (*) равносильна неравенству $x < \frac{3a}{19} - 1$. Во множестве $\left(-\infty; \frac{3a}{19} - 1\right)$ нет целых положительных чисел только если $\frac{3a}{19} \le 2$, откуда $a \le \frac{38}{3}$.

Ответ: $a \le \frac{38}{3}$.

Содержание критерия
Обоснованно получен верный ответ.
Обоснованно получен ответ, отличающийся, вследствие арифметической или логической ошибки, от верного ответа лишь конечным числом точек.
Указаны (без обоснований) необходимые и достаточные условия выполнения условий задачи, но вычисления содержат ошибки, в результате которых получен неверный ответ.
Найдено (без обоснований) значение параметра, удовлетворяющее условию задачи.
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.

C6 Решите уравнение в натуральных числах $n^2 + \sigma^2(n) = 2$[illegible] $\sigma(n)$ – сумма десятичных цифр числа n.

Решение. Очевидно, $n^2 = 2000 - \sigma^2(n) < 2000$, поэтому $n \le 44$. З[illegible] что при $n \le 44$ $\sigma(n) \le \sigma(39) = 12$.

Откуда: $n^2 = 2000 - \sigma^2(n) \ge 2000 - 144 = 1856$.

Поэтому $n \ge \sqrt{1856}$, то есть $n \ge 44$.

Из оценок $n \le 44$ и $n \ge 44$ следует: $n = 44$.

Ответ: $n = 44$.

Содержание критерия
Обоснованно получен верный ответ.
Получен верный ответ, но пропущены некоторые обоснования. Например, отсутствует нижняя оценка искомого числа и проведен неполный перебор всех возможных значений.
Сделаны обе оценки, возможно, более грубые, что привело к появлению лишних решений.
Сделана хотя бы одна верная оценка искомого числа.
Решение не соответствует ни одному из перечисленных выше критериев.