C1 Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 81^{\operatorname{tg} x} - 8\cdot 9^{\operatorname{tg} x} - 9 = 0, \\ \sqrt{y-2} + 8\cos x = 0. \end{cases}$$

Решение.

Пусть $z = 9^{\operatorname{tg} x}$. Первое уравнение принимает вид $z^2 - 8z - 9 = 0$, откуда $z_1 = -1$; $z_2 = 9$.

Уравнение $9^{\operatorname{tg} x} = -1$ не имеет решений. Из уравнения $9^{\operatorname{tg} x} = 9$ находим $\operatorname{tg} x = 1$.

Из второго уравнения системы следует, что $\cos x \le 0$. Значит, $x = -\dfrac{3\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, и $\cos x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

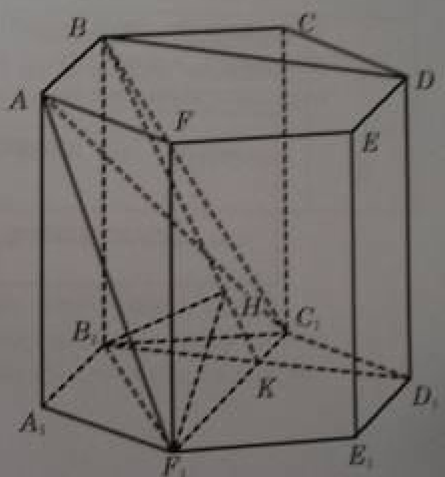
Второе уравнение принимает вид $\sqrt{y-2} - 4\sqrt{2} = 0$, откуда $y = 34$.

Ответ: $\left(-\dfrac{3\pi}{4} + 2\pi n;\ 34\right)$, $n \in \mathbb{Z}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	2
Получен ответ, но решение неверно только из-за того, что не учтены ограничения на знак или величину выражения $\cos x$ ($\sin x$)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

C2 В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ сторона основания равна 7, а высота равна 1. Найдите угол между прямой F_1B_1 и плоскостью AF_1C_1.

Решение.



Плоскость AF_1C_1 дает сечение AF_1C_1B. Опустим на эту плоскость перпендикуляр B_1H из точки B_1. Тогда HF_1B_1 – искомый угол.

Плоскость AF_1C_1 содержит прямую F_1C_1, перпендикулярную плоскости BB_1D_1. Поэтому плоскости AF_1C_1 и BB_1D перпендикулярны. Из этого следует, что перпендикуляр B_1H содержится в плоскости BB_1D_1.

Рассмотрим сечение BB_1D_1D, в

котором $BB_1=1$, $B_1D_1=7\sqrt{3}$. Пусть K – точка пересечения F_1C_1 и B_1D_1. Тогда K – середина B_1D_1, и поэтому $B_1K=\dfrac{7\sqrt{3}}{2}$.

Из прямоугольного треугольника BB_1K находим высоту:

$$B_1H=\frac{B_1K\cdot B_1B}{BK}=\frac{7\sqrt{3}}{\sqrt{151}}.$$

Тогда из прямоугольного треугольника F_1B_1H получаем:

$$\sin\angle HF_1B_1=\frac{B_1H}{F_1B_1}=\frac{1}{\sqrt{151}}.$$

Ответ: $\arcsin\dfrac{1}{\sqrt{151}}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	2
Способ нахождения искомого угла верен, но получен неверный	1
перечисленных выше	

C3 Решите неравенство

$$\frac{\log_{9^{x-6}}(x+2)}{\log_{9^{x-6}}x^2}<1.$$

Решение.

Решения ищем на множестве: $\begin{cases} x\neq 6,\\ x\neq 0,\\ x\neq 1,\\ x\neq -1,\\ x>-2.\end{cases}$

При этих условиях неравенство принимает вид $\log_{x^2}(x+2)<1$. Возможны два случая.

1) $\begin{cases} x^2>1,\\ x^2-x-2>0.\end{cases}$

Тогда, с учётом ограничений, $x\in(-2;\ -1)\cup(2;\ 6)\cup(6;\ +\infty)$.

2) $\begin{cases} 0<x^2<1,\\ x^2-x-2<0.\end{cases}$

Тогда $x\in(-1;\ 0)\cup(0;\ 1)$.

Ответ: $(-2;\ -1)\cup(-1;\ 0)\cup(0;\ 1)\cup(2;\ 6)\cup(6;\ +\infty)$.

Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

C4 В окружность радиуса $\frac{3\sqrt{5}}{2}$ вписана трапеция с основаниями 3 и 4. Найдите расстояние от центра окружности до точки пересечения диагоналей трапеции.

Решение.

Пусть O – центр окружности, E – точка пересечения диагоналей трапеции, h_1 и h_2 – расстояния от точки E до оснований AD и BC соответственно, h – высота трапеции, $h = h_1 + h_2$.

Из подобия треугольников AED и CEB следует $\frac{h_1}{3} = \frac{h_2}{4}$.

Точка O не лежит на основании трапеции, поскольку оба основания меньше диаметра окружности. Возможны два случая:

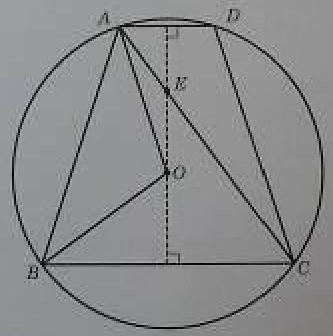


Рис. 1

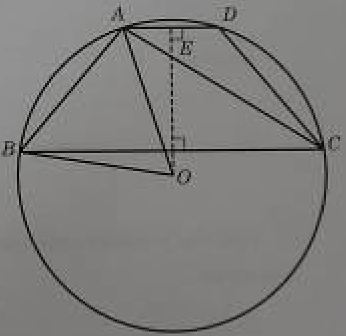


Рис. 2

1) Точка O лежит внутри трапеции (рис. 1). Тогда высота трапеции равна $\frac{6+\sqrt{29}}{2}$. Значит, $OE = 3 - \frac{3}{7} \cdot \frac{6+\sqrt{29}}{2} = \frac{24-3\sqrt{29}}{14}$.

2) Точка O лежит вне трапеции (рис. 2). Тогда высота трапеции равна $\frac{6-\sqrt{29}}{2}$. Значит, $OE = \frac{24+3\sqrt{29}}{14}$.

Ответ: $\frac{24+3\sqrt{29}}{14}$ или $\frac{24-3\sqrt{29}}{14}$.

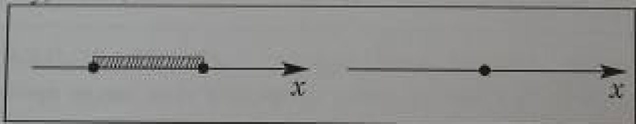
Содержание критерия	Баллы
Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации и получен правильный ответ	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная конфигурация, в которой получено правильное значение искомой величины	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, в которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

неправильное из-за арифметической ошибки	
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

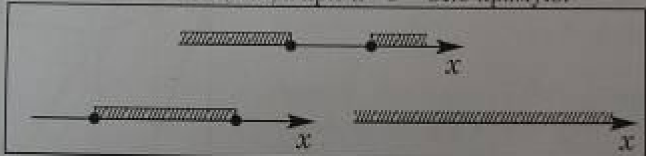
С5 Найдите все значения a, при каждом из которых ровно одно решение неравенства $x^2+(5a+3)x+4a^2\le 4$ удовлетворяет неравенству $ax(x-4-a)\le 0$.

Решение.

1. Множество решений неравенства: $x^2+(5a+3)x+4a^2\le 4 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (x-(-4a-4))(x-(-a+1))\le 0$, образует отрезок (возможно, вырожденный в точку) с концами $-4a-4$ и $-a+1$.



2. Множество решений неравенства $ax(x-4-a)\le 0$ образует при $a<0$ объединение двух лучей (направленных в противоположные стороны и, возможно, «склеенных» в одну прямую) с концами 0 и $4+a$; при $a>0$ – отрезок с этими же концами, а при $a=0$ – всю прямую.



Ровно одна точка первого множества может принадлежать второму, только когда первое вырождается в точку или один из его концов совпадает с концом второго множества, т.е. в следующих случаях:

а) $-4a-4=-a+1$, следовательно, $a=-\frac{5}{3}$, тогда только одно решение $\left(x=\frac{8}{3}\right)$ первого неравенства удовлетворяет второму;

б) $-4a-4=0$, следовательно, $a=-1$, тогда только одно решение $(x=0)$ первого неравенства удовлетворяет второму;

в) $-4a-4=4+a$, следовательно, $a=-\frac{8}{5}$, тогда все числа отрезка $\left[\frac{12}{5};\ \frac{13}{5}\right]$, состоящего из решений первого неравенства, удовлетворяют второму;

г) $-a+1=0$, следовательно, $a=1$, тогда только одно решение $(x=0)$ первого неравенства удовлетворяет второму;

д) $-a+1=4+a$, следовательно, $a=-\frac{3}{2}$, тогда только одно решение $\left(x=\frac{5}{2}\right)$ первого неравенства удовлетворяет второму.

Ответ: $-\frac{5}{3};\ -\frac{3}{2};\ -1;\ 1.$

Содержание критерия	Баллы

C6 Найдите все пары натуральных чисел k и n таких, что $k < n$ и $(\sqrt{n})^k = (\sqrt{k})^n$.

Решение.

1. Преобразуем исходное равенство:

$$(\sqrt{n})^k = (\sqrt{k})^n \Leftrightarrow k\ln\sqrt{n} = n\ln\sqrt{k} \Leftrightarrow \frac{1}{n}\ln n = \frac{1}{k}\ln k \Leftrightarrow f(n) = f(k),$$

где $f(x) = \frac{1}{x}\ln x, \quad x > 0$.

2. $f'(x) = -\frac{1}{x^2}\ln x + \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x} = -\frac{\ln x - \ln e}{x^2}, \quad \begin{cases} f'(x) \le 0, & x \ge e, \\ f'(x) \ge 0, & 0 < x \le e, \end{cases}$

то функция возрастает на $(0; e]$ и убывает на $[e; +\infty)$. Так как $k < n$, равенство $f(n) = f(k)$ может выполняться только при условии $k < e < n$, следовательно, $k = 1;\ 2$, причем для каждого k может найтись не более одного значения n, удовлетворяющего уравнению в паре с этим значением k.

3. В случае $k = 1$ из уравнения получаем: $\frac{1}{n}\ln n = \frac{1}{k}\ln k = 0$, откуда следует $n = 1$, что невозможно.

4. В случае $k = 2$ уравнению удовлетворяет значение $n = 4$: $\frac{1}{4}\ln 4 = \frac{2}{4}\ln 2 = \frac{1}{2}\ln 2$, и только оно (в силу вышесказанного).

Ответ: $k = 2$, $n = 4$.

Содержание критерия	Баллы