

**C1** Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 5 \cdot 25^{\lg x} + 14 \cdot 5^{\lg x} - 3 = 0, \\ \sqrt{3y - y^2} + 2 \sin x = 0. \end{cases}$$

Сделаем замену  $z = 5^{\lg x}$ . Из первого уравнения получаем:  $5z^2 + 14z - 3 = 0$ .

Корни уравнения:  $z = -3$  или  $z = \frac{1}{5}$ .

Уравнение  $5^{\lg x} = -3$  не имеет решений, а из уравнения  $5^{\lg x} = \frac{1}{5}$  получаем:  $\lg x = -1$ .

Из второго уравнения следует, что  $\sin x \leq 0$ . Следовательно,  $x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$  и  $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ .

Из второго уравнения находим:  $\sqrt{3y - y^2} = \sqrt{2}$ , откуда  $y^2 - 3y + 2 = 0$ .  
Корни:  $y = 1$  или  $y = 2$ .

Ответ:  $\left(-\frac{\pi}{4} + 2\pi n; 1\right); \left(-\frac{\pi}{4} + 2\pi n; 2\right), n \in \mathbb{Z}$ .

Содержание критерия	Балл
Обоснованно получен верный ответ	2
Первое уравнение решено верно, однако решение системы содержит ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

**C2** В правильной четырехугольной пирамиде  $SABCD$  с основанием  $ABCD$  сторона основания равна  $3\sqrt{2}$ , а боковое ребро равно 5. Найдите угол между плоскостями  $ABC$  и  $ACM$ , где точка  $M$  делит ребро  $BS$  так, что  $BM : MS = 2 : 1$ .

Треугольники  $MSC$  и  $MSA$  равны, следовательно,  $MC = MA$ . Треугольник  $AMC$  равнобедренный. Проведем в этом треугольнике высоту  $MO$ .  $O$  – центр основания. Диагонали квадрата перпендикулярны, следовательно,  $BO \perp AC$ . Таким образом, искомый линейный угол – угол  $BOM$ .

В прямоугольном треугольнике  $SOB$ :  $SO = \sqrt{SB^2 - BO^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$ .

Проведем перпендикуляр  $MH$  к плоскости основания.  $MH = \frac{2}{3}SO = \frac{8}{3}$ .

$$OH = \frac{1}{3}OB = 1.$$

Из прямоугольного треугольника  $OHM$  находим:  $\operatorname{tg} \angle MOH = \frac{MH}{OH} = \frac{8}{3}$ .

Ответ:  $\operatorname{arctg} \frac{8}{3}$ .

Содержание критерия	Балл
Обоснованно получен верный ответ	2
Найден плоский угол, равный искомому углу, ответ неверный в связи с вычислительной ошибкой	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

**C3** Решите неравенство  $\log_4(x+2) \cdot \log_x 2 \leq 1$ .

Преобразуем неравенство:

$$\frac{\log_2(x+2)}{2 \log_2 x} \leq 1; \log_x(x+2) \leq 2.$$

1 случай:  $\begin{cases} x+2 \leq x^2, \\ x > 1; \end{cases} \begin{cases} x^2 - x - 2 \geq 0, \\ x > 1, \end{cases}$  откуда  $x \geq 2$ .

2 случай:  $\begin{cases} x^2 - x - 2 \leq 0, \\ 0 < x < 1, \end{cases}$  откуда  $0 < x < 1$ .

Решение неравенства найдем, объединяя найденные промежутки:  $0 < x < 1, x \geq 2$ .

Ответ:  $(0; 1), [2; +\infty)$ .

Содержание критерия	Балл
Обоснованно получен верный ответ	3
Ответ отличается от верного ошибочным включением или ошибочным исключением граничных точек найденных промежутков	2
Ответ содержит лишние промежутки, либо один из нужных промежутков не включен в ответ	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

**C4** Точка  $H$  – основание высоты треугольника со сторонами 10, 12, 14, опущенной на сторону, равную 12. Через точку  $H$  проведена прямая, отсекающая от треугольника подобный ему треугольник и пересекающая сторону, равную 10, в точке  $M$ . Найдите  $HM$ .

Пусть  $CH$  – высота треугольника  $ABC$  со сторонами  $AB = 12, AC = 10, BC = 14$ .

По теореме косинусов

$$\cos \angle BAC = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \cdot AC} = \frac{144 + 100 - 196}{2 \cdot 12 \cdot 10} = \frac{1}{5}.$$

Из прямоугольного треугольника  $AHC$  находим, что

$$AH = AC \cos \angle BAC = 10 \cdot \frac{1}{5} = 2.$$

Заметим, что существует ровно два случая расположения точки  $M$  на стороне  $AC$ : либо  $\angle AHM = \angle ABC$  (рис. 1), либо  $\angle AHM = \angle ACB$  (рис. 2).

В первом из этих случаев  $HM \parallel BC$ , треугольник  $AHM$  подобен треугольнику  $ABC$  с коэффициентом  $\frac{AH}{AB} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$ , следовательно,

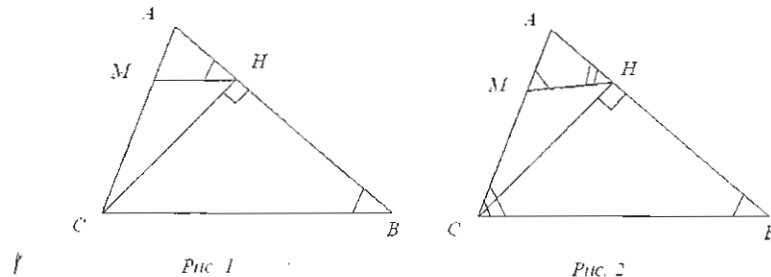
$$HM = BC \cdot \frac{1}{6} = 14 \cdot \frac{1}{6} = \frac{7}{3}.$$

Пусть теперь  $\angle AHM = \angle ACB$ . Тогда треугольник  $AHM$  подобен треугольнику  $ABC$ , причем коэффициент подобия равен

$$\frac{AH}{AC} = \cos \angle BAC = \frac{1}{5},$$

следовательно,

$$HM = BC \cdot \frac{1}{5} = 14 \cdot \frac{1}{5} = \frac{14}{5}.$$



Ответ:  $\frac{7}{3}$  или  $\frac{14}{5}$

Содержание критерия	Балл
Обоснованно получен верный ответ	3
Рассмотрены обе геометрические конфигурации. Хотя бы в одном случае получен верный ответ. Ответ в другом случае неверный из-за вычислительной ошибки	2
Верно и полностью рассмотрена хотя бы одна геометрическая конфигурация. Для нее получен верный ответ	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных ниже	0

**C5** Найдите наименьшее значение параметра  $a$ , при котором функция

$$y = 9 + 7x - 3|ax + 2| + |ax + 5| + |x + 1|$$

является неубывающей на всей числовой прямой.

Функция  $y = 9 + 7x - 3|ax + 2| + |ax + 5| + |x + 1|$  определена при всех  $x \in \mathbb{R}$ .

Предположим, что  $a < 0$ . На каждом из промежутков с границами  $-1; -\frac{2}{a}; -\frac{5}{a}$  (в порядке возрастания) функция является линейной, и её график лежит на некоторой прямой.

Чтобы функция нигде не убывала, необходимо и достаточно, чтобы все возможные угловые коэффициенты этих прямых были неотрицательны.

Если  $x < -1$ , получаем угловой коэффициент  $7 + 3|a| - |a| - 1 = -2a + 6$ .

Если  $-1 \leq x < -\frac{2}{a}$ , то угловой коэффициент  $7 + 3|a| - |a| + 1 = -2a + 8$ .

Если  $-\frac{2}{a} \leq x < -\frac{5}{a}$ , то угловой коэффициент  $7 - 3|a| - |a| + 1 = 4a + 8$ .

Если  $x \geq -\frac{5}{a}$ , то угловой коэффициент  $7 - 3|a| + |a| + 1 = 2a + 8$ .

Получаем систему

$$\begin{cases} 6 - 2a \geq 0, \\ 8 - 2a \geq 0, \\ 4a + 8 \geq 0, \text{ откуда } -2 \leq a < 0, \\ 2a + 8 \geq 0, \\ a < 0, \end{cases}$$

Поскольку нас интересует только наименьшее значение  $a$  случай  $a \geq 0$  рассматривать не нужно.

Ответ:  $-2$ .

Содержание критерия	Балл
Обоснованно получен верный ответ	4
Ответ отличается от верного вследствие арифметической ошибки	3
Обоснование содержит логическую ошибку – рассмотрены не все неравенства или при нахождении системы неравенств не указано, почему часть из них можно не рассматривать. Ответ верный или неверный вследствие этой ошибки	2
Указаны (без обоснований) необходимые и достаточные условия выполнения условий задачи, но вычисления содержат ошибки, в результате которых ответ неверный	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

Содержание критерия	Балл
Обоснованно получен верный ответ.	4
Имеются небольшие погрешности в обосновании. Например, в приведенном решении не указано, что пара $x=1, y=1$ не является решением	3
Задача решена для случая $x=y$ . То, что $x=y$ не доказано	2
Найдено только наименьшее значение или только наибольшее значение. В обосновании и доказательствах имеются существенные пробелы	1
Все случаи решения, не удовлетворяющие ни одному из критериев, описанных выше	0

**С6** Найдите наименьшее и наибольшее натуральные значения  $n$ , при которых уравнение

$$(x^2 + y^2)^{2010} = x^n \cdot y^n$$

имеет натуральные решения.

При любом  $n$  пара  $x=1, y=1$  не является решением. Поэтому

$$(xy)^n = (x^2 + y^2)^{2010} \geq (2xy)^{2010} > (xy)^{2010}.$$

Значит,  $n > 2010$ .

Предположим, что  $x \neq y$ . Тогда найдется простое число  $p$ , такое что  $x = p^k a, y = p^m b$ , и числа  $a$  и  $b$  не делятся на  $p$ . Для определенности можно считать, что  $k > m \geq 0$ .

Тогда

$$\begin{aligned} (p^{2k} a^2 + p^{2m} b^2)^{2010} &= (p^{k+m} ab)^n; \\ (p^{2(k-m)} a^2 + b^2)^{2010} &= a^n b^n p^{n(k+m) - 2m \cdot 2010}. \end{aligned} \quad (1)$$

Из условий  $n > 2010$  и  $k > m$  получаем:

$$n(k+m) - 2m \cdot 2010 = (nk - 2010m) + m(n - 2010) > 0.$$

Значит, правая часть равенства (1) – целое число, которое делится на  $p$ .

Левая часть на  $p$  не делится. Противоречие.

Пусть теперь  $x = y$ , тогда из равенства

$$(x^2 + x^2)^{2010} = (x^2)^n \text{ получаем: } x^{n-2010} = 2^{1005}.$$

Откуда  $x = 2^q, q = 0, 1, 2, \dots$  и  $q(n-2010) = 1005$ .

Поэтому  $n-2010$  натуральный делитель числа 1005. По условию нас интересуют только наименьшее и наибольшее возможное значение  $n$ . Поэтому нужно взять  $n-2010=1$  и  $n-2010=1005$ , откуда  $n=2011$  и  $n=3015$ . При  $n=2011$   $x=y=2^{1005}$ , при  $n=3015$   $x=y=2$ .

Ответ: 2011, 3015

**C1** Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 5 \cdot 25^{\lg y} + 14 \cdot 5^{\lg y} - 3 = 0, \\ \sqrt{-3x - x^2} + 2 \sin y = 0. \end{cases}$$

Сделаем замену  $z = 5^{\lg y}$ . Из первого уравнения получаем:  $5z^2 + 14z - 3 = 0$ .

Корни уравнения:  $z = -3$  или  $z = \frac{1}{5}$ .

Уравнение  $5^{\lg y} = -3$  не имеет решений, а из уравнения  $5^{\lg y} = \frac{1}{5}$  получаем:

$$\lg y = -1.$$

Из второго уравнения следует, что  $\sin y \leq 0$ . Следовательно,

$$y = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \text{ и } \sin y = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Из второго уравнения находим:  $\sqrt{-3x - x^2} = \sqrt{2}$ , откуда  $x^2 + 3x + 2 = 0$ .

Корни:  $x = -1$  или  $x = -2$ .

Ответ:  $\left(-1; -\frac{\pi}{4} + 2\pi n\right); \left(-2; -\frac{\pi}{4} + 2\pi n\right), n \in \mathbb{Z}$ .

Содержание критерия	Балл
Обоснованно получен верный ответ	2
Первое уравнение решено верно, однако решение системы содержит ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

**C2** В правильной четырехугольной пирамиде  $SABCD$  с основанием  $ABCD$  сторона основания равна  $6\sqrt{2}$ , а боковое ребро равно 10. Найдите угол между плоскостями  $ABC$  и  $ACM$ , где точка  $M$  делит ребро  $BS$  так, что  $BM : MS = 2 : 1$ .

Треугольники  $MSC$  и  $MSA$  равны, следовательно,  $MC = MA$ . Треугольник  $AMC$  равнобедренный. Проведем в этом треугольнике высоту  $MO$ .  $O$  – центр основания. Диагонали квадрата перпендикулярны, следовательно,  $BO \perp AC$ . Таким образом, искомый линейный угол – угол  $BOM$ .

В прямоугольном треугольнике  $SOB$ :  $SO = \sqrt{SB^2 - BO^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$ .

Проведем перпендикуляр  $MH$  к плоскости основания.  $MH = \frac{2}{3}SO = \frac{16}{3}$ .

$$OH = \frac{1}{3}OB = 2.$$

Из прямоугольного треугольника  $OHM$  находим:  $\operatorname{tg} \angle MOH = \frac{MH}{OH} = \frac{8}{3}$ .

Ответ:  $\operatorname{arctg} \frac{8}{3}$ .

Содержание критерия	Балл
Обоснованно получен верный ответ	2
Найден плоский угол, равный искомому углу, ответ неверный в связи с вычислительной ошибкой	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

**C3** Решите неравенство  $\log_4 y \cdot \log_{y-2} 2 \leq 1$ .

Преобразуем неравенство:

$$\frac{\log_2 y}{2 \log_2 (y-2)} \leq 1; \log_{y-2} y \leq 2.$$

1 случай:  $\begin{cases} y \leq (y-2)^2, \\ y-2 > 1; \end{cases} \begin{cases} y^2 - 5y + 4 \geq 0, \\ y > 3, \end{cases}$  откуда  $y \geq 4$ .

2 случай:  $\begin{cases} y^2 - 5y + 4 \leq 0, \\ 2 < y < 3, \end{cases}$  откуда  $2 < y < 3$ .

Решение неравенства найдем, объединяя найденные промежутки:  $2 < y < 3, y \geq 4$ .

Ответ:  $(2; 3), [4; +\infty)$ .

Содержание критерия	Балл
Обоснованно получен верный ответ	3
Ответ отличается от верного ошибочным включением или ошибочным исключением граничных точек найденных промежутков	2
Ответ содержит лишние промежутки, либо один из нужных промежутков не включен в ответ	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

**C4** Площадь трапеции  $ABCD$  равна 240. Диагонали пересекаются в точке  $O$ , отрезки, соединяющие середину  $P$  основания  $AD$  с вершинами  $B$  и  $C$ , пересекаются с диагоналями трапеции в точках  $M$  и  $N$ . Найдите площадь четырехугольника  $OMPN$ , если одно из оснований трапеции втрое больше другого.

Пусть  $AD = 3BC$  (рис. 1). Положим  $BC = a$ ,  $AD = 3a$ ,  $OC = x$ .

Треугольник  $COB$  подобен треугольнику  $AOD$  с коэффициентом  $\frac{BC}{AD} = \frac{1}{3}$ , а треугольник  $CMB$  подобен треугольнику  $AMP$  с коэффициентом  $\frac{BC}{AP} = \frac{a}{\frac{3a}{2}} = \frac{2}{3}$ , поэтому:

$$OA = 3x, AC = OA + OC = 3x + x = 4x, MC = \frac{2}{5} \cdot 4x = \frac{8}{5}x,$$

$$OM = MC - OC = \frac{8}{5}x - x = \frac{3}{5}x,$$

значит,  $\frac{OM}{OA} = \frac{\frac{3}{5}x}{3x} = \frac{1}{5}$ . Аналогично,  $\frac{ON}{OD} = \frac{1}{5}$ .

Пусть  $h$  – высота трапеции. Тогда

$$\frac{a+3a}{2}h = 2ah = 240, ah = 120, S_{AOD} = \frac{1}{2} \cdot 3a \cdot \frac{3}{4}h = \frac{9}{8}ah = 135,$$

$$S_{DNP} = S_{AMP} = \frac{AM}{AO} \cdot \frac{AP}{AD} S_{AOD} = \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot 135 = 54.$$

Следовательно,

$$S_{OMPN} = S_{AOD} - S_{DNP} - S_{AMP} = 135 - 54 - 54 = 27.$$

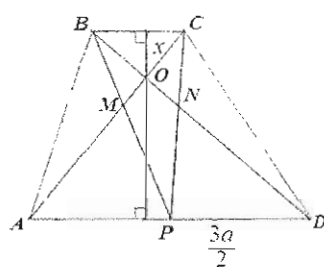


Рис. 1

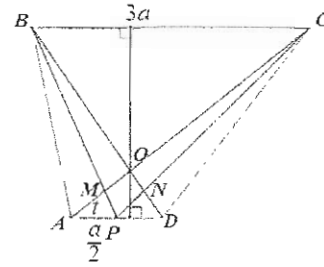


Рис. 2

Рассмотрим случай, когда  $BC = 3AD$  (рис. 2). Положим  $BC = 3a$ ,  $AD = a$ ,  $AM = t$ . Треугольник  $AOD$  подобен треугольнику  $COB$

с коэффициентом  $\frac{AD}{BC} = \frac{1}{3}$ , а треугольник  $AMP$  подобен треугольнику  $CMB$

с коэффициентом  $\frac{AP}{BC} = \frac{\frac{a}{2}}{3a} = \frac{1}{6}$ , поэтому

$$MC = 6t, AC = AM + MC = 6t + t = 7t, OA = \frac{1}{4}AC = \frac{1}{4} \cdot 7t = \frac{7}{4}t,$$

значит,  $\frac{AM}{AO} = \frac{t}{\frac{7}{4}t} = \frac{4}{7}$ . Аналогично,  $\frac{DN}{DO} = \frac{4}{7}$ .

Пусть  $h$  – высота трапеции. Тогда

$$\frac{a+3a}{2}h = 2ah = 240, ah = 120, S_{AOD} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{1}{4}h = \frac{1}{8}ah = 15,$$

$$S_{DNP} = S_{AMP} = \frac{AM}{AO} \cdot \frac{AP}{AD} S_{AOD} = \frac{4}{7} \cdot \frac{1}{2} \cdot 15 = \frac{30}{7}.$$

$$\text{Следовательно, } S_{OMPN} = S_{AOD} - S_{DNP} - S_{AMP} = 15 - \frac{30}{7} - \frac{30}{7} = \frac{45}{7}.$$

Ответ: 27 или  $\frac{45}{7}$ .

Содержание критерия	Балл
Обоснованно получен верный ответ	3
Рассмотрены обе геометрические конфигурации. Хотя бы в одном случае получен верный ответ. Ответ в другом случае неверный из-за вычислительной ошибки	2
Верно и полностью рассмотрена хотя бы одна геометрическая конфигурация. Для нее получен верный ответ	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных ниже	0

**C5** Найдите наименьшее значение параметра  $a$ , при котором функция

$$y = -7 + 3x - 3|ax - 1| + |ax - 2| + |x - 7|$$

является неубывающей на всей числовой прямой.

Функция  $y = -7 + 3x - 3|ax - 1| + |ax - 2| + |x - 7|$  определена при всех  $x \in \mathbb{R}$ .

Предположим, что  $a < 0$ . На каждом из промежутков с границами  $\frac{2}{a}, \frac{1}{a}, 7$  (в порядке возрастания) функция является линейной, и её график лежит на некоторой прямой.

Чтобы функция нигде не убывала, необходимо и достаточно, чтобы все возможные угловые коэффициенты этих прямых были неотрицательны.

Если  $x < \frac{2}{a}$ , то угловой коэффициент равен  $3 + 3|a| - |a| - 1 = \sqrt{2a} + 2$ .

Если  $\frac{2}{a} \leq x < \frac{1}{a}$ , то угловой коэффициент равен  $3 + 3|a| + |a| - 1 = \sqrt{4a} + 2$ .

Если  $\frac{1}{a} \leq x < 7$ , то угловой коэффициент равен  $3 - 3|a| + |a| - 1 = -2a + 2$ .

Если  $x \geq 7$ , то угловой коэффициент равен  $3 - 3|a| + |a| + 1 = -2a + 4$ .

Получаем систему:

$$\begin{cases} 2a + 2 \geq 0, \\ 4a + 2 \geq 0, \\ 2 - 2a \geq 0, \text{ откуда } -0,5 \leq a < 0. \\ 4 - 2a \geq 0, \\ a < 0, \end{cases}$$

Поскольку спрашивается только наименьшее значение  $a$ , случай  $a \geq 0$  рассматривать не нужно.

Ответ: ~~0,5~~ - 1

Содержание критерия	Балл
Обоснованно получен верный ответ	4
Ответ отличается от верного вследствие арифметической ошибки	3
Обоснование содержит логическую ошибку – рассмотрены не все неравенства или при нахождении системы неравенств не указано, почему часть из них можно не рассматривать. Ответ верный или неверный вследствие этой ошибки	2
Указаны (без обоснований) необходимые и достаточные условия выполнения условий задачи, но вычисления содержат ошибки, в результате которых ответ неверный	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

**С6** Найдите наименьшее и наибольшее натуральные значения  $n$ , при которых уравнение

$$\frac{2010 \ln(x^2 + y^2)}{n} = \ln(xy)$$

имеет натуральные решения.

При положительных  $x$  и  $y$  получаем уравнение

$$(x^2 + y^2)^{2010} = (xy)^n$$

При любом  $n$  пара  $x=1, y=1$  не является решением. Поэтому

$$(xy)^n = (x^2 + y^2)^{2010} \geq (2xy)^{2010} > (xy)^{2010}.$$

Значит,  $n > 2010$ .

Предположим, что  $x \neq y$ . Тогда найдется простое число  $p$ , такое что  $x = p^k a, y = p^m b$ , и числа  $a$  и  $b$  не делятся на  $p$ . Для определенности можно считать, что  $k > m \geq 0$ .

Тогда

$$(p^{2k} a^2 + p^{2m} b^2)^{2010} = (p^{k+m} ab)^n;$$

$$(p^{2(k-m)} a^2 + b^2)^{2010} = a^n b^n p^{n(k+m) - 2m \cdot 2010}. \quad (1)$$

Из условий  $n > 2010$  и  $k > m$  получаем:

$$n(k+m) - 2m \cdot 2010 = (nk - 2010m) + m(n - 2010) > 0.$$

Значит, правая часть равенства (1) – целое число, которое делится на  $p$ . Левая часть на  $p$  не делится. Противоречие.

Пусть теперь  $x = y$ , тогда из равенства

$$(x^2 + x^2)^{2010} = (x^2)^n \text{ получаем: } x^{n-2010} = 2^{1005}.$$

Откуда  $x = 2^q, q = 0, 1, 2, \dots$  и

$$q(n - 2010) = 1005.$$

Поэтому  $n - 2010$  натуральный делитель числа 1005. По условию нас интересуют только наименьшее и наибольшее возможное значение  $n$ . Поэтому нужно взять  $n - 2010 = 1$  и  $n - 2010 = 1005$ , откуда  $n = 2011$  и  $n = 3015$ . При  $n = 2011$   $x = y = 2^{1005}$ , при  $n = 3015$   $x = y = 2$ .

Ответ: 2011, 3015.

Содержание критерия	Балл
Обоснованно получен верный ответ	4
Имеются небольшие погрешности в обосновании. Например, в приведенном решении не указано, что пара $x=1, y=1$ не является решением	3
Задача решена для случая $x = y$ . То, что $x = y$ не доказано	2
Найдено только наименьшее значение или только наибольшее значение. В обосновании и доказательствах имеются существенные пробелы	1
Все случаи решения, не удовлетворяющие ни одному из критериев, описанных выше	0



**C1** Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2 \cdot 16^{\sin x} + 3 \cdot 4^{\sin x} + 2 = 0, \\ 2 \cos x - \sqrt{4y^2 + y} = 0. \end{cases}$$

Сделаем замену  $z = 4^{\sin x}$ . Из первого уравнения получаем:  $2z^2 + 3z + 2 = 0$ .

Корни уравнения:  $z = \frac{1}{2}$  или  $z = -2$ .

Уравнение  $4^{\sin x} = -2$  не имеет решений, а из уравнения  $4^{\sin x} = \frac{1}{2}$  получаем:

$$\sin x = -\frac{1}{2}.$$

Из второго уравнения следует, что  $\cos x \geq 0$ . Следовательно,

$$x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \text{ и } \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Из второго уравнения находим:  $\sqrt{3} = \sqrt{4y^2 + y}$ , откуда  $4y^2 + y - 3 = 0$ .

Корни:  $y = -1$  или  $y = \frac{3}{4}$ .

$$\text{Ответ: } \left(-\frac{\pi}{6} + 2\pi n; -1\right); \left(-\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{3}{4}\right), n \in \mathbb{Z}.$$

Содержание критерия

Обоснованно получен верный ответ

Первое уравнение решено верно, однако решение системы содержит ошибки

Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше

Балл

2

1

0

**C2** В правильной треугольной пирамиде  $SABC$  с основанием  $ABC$  сторона основания равна  $6\sqrt{3}$ , а боковое ребро равно 10. Найдите угол между плоскостью  $ABC$  и прямой  $MN$ , где  $N$  – середина ребра  $AC$ , а точка  $M$  делит ребро  $BS$  так, что  $BM : MS = 2 : 1$ .

Проекцией прямой  $MN$  на плоскость основания служит прямая  $BN$ , поскольку точка  $M$  проектируется на прямую  $BO$ , где  $O$  – центр основания. Значит, искомый угол  $MNB$ .

В прямоугольном треугольнике  $SOB$ :

$$BO = \frac{BC\sqrt{3}}{3} = 6, \quad SO = \sqrt{SB^2 - BO^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8.$$

Проведем перпендикуляр  $MH$  к плоскости основания.  $MH = \frac{2}{3}SO = \frac{16}{3}$ .

$$NH = NO + OH = \frac{BC\sqrt{3}}{6} + \frac{1}{3}OB = 3 + 2 = 5.$$

Из прямоугольного треугольника  $NHM$  находим:

$$\operatorname{tg} \angle MNH = \frac{MH}{NH} = \frac{16}{3 \cdot 5} = \frac{16}{15}.$$

Ответ:  $\operatorname{arctg} \frac{16}{15}$ .

Содержание критерия

Обоснованно получен верный ответ

Найден плоский угол, равный искомому углу, ответ неверный в связи с вычислительной ошибкой

Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше

Балл

2

1

0

**C3** Решите неравенство  $\log_9 y \cdot \log_{y-6} 3 \geq 1$ .

Преобразуем неравенство:

$$\frac{\log_3 y}{2 \log_3 (y-6)} \geq 1; \quad \log_{y-6} y \geq 2.$$

$$1 \text{ случай: } \begin{cases} y \geq (y-6)^2, \\ y-6 > 1; \end{cases} \begin{cases} y^2 - 13y + 36 \leq 0, \\ y > 7, \end{cases} \text{ откуда } 7 < y \leq 9.$$

$$2 \text{ случай: } \begin{cases} y^2 - 13y + 36 \geq 0, \\ 0 < y-6 < 1. \end{cases} \text{ В этом случае решений нет.}$$

Ответ:  $(7; 9]$ .

Содержание критерия

Обоснованно получен верный ответ

Ответ отличается от верного ошибочным включением или ошибочным исключением граничных точек найденных промежутков

Ответ содержит лишние промежутки

Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше

Балл

3

2

1

0

**C4** Площадь трапеции  $ABCD$  равна 90. Диагонали пересекаются в точке  $O$ , отрезки, соединяющие середину  $P$  основания  $AD$  с вершинами  $B$  и  $C$ , пересекаются с диагоналями трапеции в точках  $M$  и  $N$ . Найдите площадь четырехугольника  $OMPN$ , если одно из оснований трапеции вдвое больше другого.

Пусть  $AD = 2BC$  (рис. 1). Четырехугольники  $ABCP$  и  $BCDP$  – параллелограммы, поэтому  $M$  и  $N$  – середины  $BP$  и  $CP$ , значит,  $CM$  и  $BN$  – медианы треугольника  $BPC$ . Пусть  $h$  – высота трапеции. Положим  $BC = a$ ,  $AD = 2a$ . Тогда

$$\frac{a + 2a}{2} h = \frac{3}{2} ah = 90, \quad ah = 60.$$

Следовательно,

$$S_{OMPN} = \frac{1}{3} S_{BPC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} ah = \frac{1}{6} \cdot 60 = 10.$$

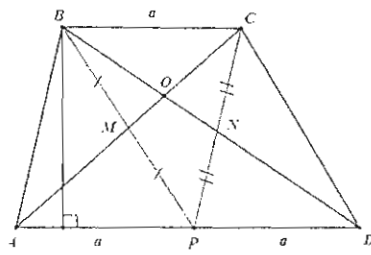


Рис. 1

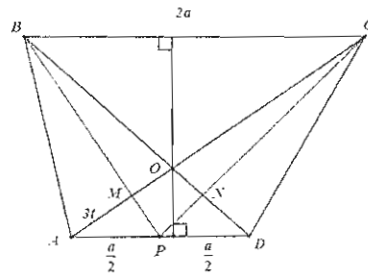


Рис. 2

Пусть теперь  $BC = 2AD$  (рис. 2). Пусть  $h$  – высота трапеции. Положим  $AD = a$ ,  $BC = 2a$ ,  $AM = 3t$ . Тогда  $ah = 60$ .

Треугольник  $AOD$  подобен треугольнику  $COB$  с коэффициентом  $\frac{1}{2}$ , а

треугольник  $AMP$  – треугольнику  $CMB$  с коэффициентом  $\frac{AP}{BC} = \frac{1}{4}$ . Тогда

$$MC = 4AM = 12t, \quad AC = AM + MC = 3t + 12t = 15t,$$

$$AO = \frac{1}{3} AC = 5t, \quad \frac{AM}{AO} = \frac{3t}{5t} = \frac{3}{5}.$$

Аналогично,  $\frac{DN}{DO} = \frac{3}{5}$ . Высота треугольника  $AOD$ , проведенная из

вершины  $O$ , равна  $\frac{1}{3}h$ , значит,

$$S_{AOD} = \frac{1}{2} a \cdot \frac{1}{3} h = \frac{1}{6} ah = \frac{1}{6} \cdot 60 = 10,$$

$$S_{DNP} = S_{AMP} = \frac{AM}{AO} \cdot \frac{AP}{AD} S_{AOD} = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot 10 = 3.$$

Следовательно,

$$S_{OMPN} = S_{AOD} - S_{DNP} - S_{AMP} = 10 - 3 - 3 = 4.$$

Ответ: 10 или 4.

Содержание критерия	Балл
Обоснованно получен верный ответ	3
Рассмотрены обе геометрические конфигурации. Хотя бы в одном случае получен верный ответ. Ответ в другом случае неверный из-за вычислительной ошибки	2
Верно и полностью рассмотрена хотя бы одна геометрическая конфигурация. Для нее получен верный ответ	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных ниже	0

**C5** Найдите наибольшее значение параметра  $a$ , при котором функция  $y = 3 + 3x - 3|ax + a - 2| + |ax + a - 6| + |x + 4|$  является неубывающей на всей числовой прямой.

Функция  $y = 3 + 3x - 3|ax + a - 2| + |ax + a - 6| + |x + 4|$  определена при всех  $x \in \mathbb{R}$ . Предположим, что  $a > 0$ . На каждом из промежутков с границами  $-4, \frac{2}{a} - 1, \frac{6}{a} - 1$  (в порядке возрастания) функция является линейной, и её график лежит на некоторой прямой.

Чтобы функция нигде не убывала, необходимо и достаточно, чтобы все возможные угловые коэффициенты этих прямых были неотрицательны.

Если  $x < -4$ , то угловой коэффициент равен  $3 + 3|a| - |a| - 1 = 2a + 2$ .

Если  $-4 \leq x < \frac{2}{a} - 1$ , то угловой коэффициент равен  $3 + 3|a| - |a| + 1 = 2a + 4$ .

Если  $\frac{2}{a} - 1 \leq x < \frac{6}{a} - 1$ , то угловой коэффициент равен  $3 - 3|a| - |a| + 1 = -4a + 4$ .

Если  $x \geq \frac{6}{a} - 1$ , то угловой коэффициент равен  $3 - 3|a| + |a| + 1 = -2a + 4$ .

Получаем систему:



$$\begin{cases} 2a + 2 \geq 0, \\ 2a + 4 \geq 0, \\ 4 - 4a \geq 0, \text{ откуда } 0 < a \leq 1. \\ 4 - 2a \geq 0, \\ a > 0, \end{cases}$$

Поскольку спрашивается только наибольшее значение  $a$ , случай  $a \leq 0$  рассматривать не нужно.

Ответ: 1.

Содержание критерия	Балл
Обоснованно получен верный ответ	4
Ответ отличается от верного вследствие арифметической ошибки	3
Обоснование содержит логическую ошибку – рассмотрены не все неравенства или при нахождении системы неравенств не указано, почему часть из них можно не рассматривать. Ответ верный или неверный вследствие этой ошибки	2
Указаны (без обоснований) необходимые и достаточные условия выполнения условий задачи, но вычисления содержат ошибки, в результате которых ответ не верный	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

**C6** Найдите наименьшее и наибольшее натуральные значения  $n$ , при которых уравнение

$$\frac{2012 \ln(x^2 + y^2)}{n} = \ln(xy)$$

имеет натуральные решения.

При положительных  $x, y$ , получаем уравнение

$$(x^2 + y^2)^{2012} = (xy)^n.$$

При любом  $n$  пара  $x=1, y=1$  не является решением. Поэтому

$$(xy)^n = (x^2 + y^2)^{2012} \geq (2xy)^{2012} > (xy)^{2012}.$$

Значит,  $n > 2012$ .

Предположим, что  $x \neq y$ . Тогда найдется простое число  $p$ , такое что  $x = p^k a, y = p^m b$ , числа  $a$  и  $b$  не делятся на  $p$ . Для определенности можно считать, что  $k > m \geq 0$ .

Тогда

$$(p^{2k} a^2 + p^{2m} b^2)^{2012} = (p^{k+m} ab)^n;$$

$$(p^{2(k-m)} a^2 + b^2)^{2012} = a^n b^n p^{n(k+m)} - 2m \cdot 2012. \quad (1)$$

Из условий  $n > 2012$  и  $k > m$  получаем:

$$n(k+m) - 2m \cdot 2012 = (nk - 2012m) + m(n - 2012) > 0.$$

Значит, правая часть равенства (1) – целое число, которое делится на  $p$ .

Левая часть на  $p$  не делится. Противоречие.

Пусть теперь  $x = y$ , тогда из равенства

$$(x^2 + x^2)^{2012} = (x^2)^n \text{ получаем: } x^{n-2012} = 2^{1006}.$$

Откуда  $x = 2^q, q = 0, 1, 2, \dots$  и  $q(n - 2010) = 1006$ .

Поэтому  $n - 2012$  натуральный делитель числа 1006. По условию нас интересуют только наименьшее и наибольшее возможное значение  $n$ .

Поэтому нужно взять  $n - 2012 = 1$  и  $n - 2012 = 1006$ , откуда  $n = 2013$  и  $n = 3018$ . При  $n = 2013, x = y = 2^{1006}$ , при  $n = 3018, x = y = 2$ .

Ответ: 2013, 3018.

Содержание критерия	Балл
Обоснованно получен верный ответ.	4
Имеются небольшие погрешности в обосновании. Например, в приведенном решении не указано, что пара $x=1, y=1$ не является решением	3
Задача решена для случая $x=y$ . То, что $x=y$ не доказано	2
Найдено только наименьшее значение или только наибольшее значение. В обосновании и доказательствах имеются существенные пробелы	1
Все случаи решения, не удовлетворяющие ни одному из критериев, описанных выше	0

**C1** Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2 \cdot 16^{\sin y} + 3 \cdot 4^{\sin y} + 2 = 0, \\ 2 \cos y - \sqrt{4x^2 - x} = 0. \end{cases}$$

Сделаем замену  $z = 4^{\sin y}$ . Из первого уравнения получаем:  $2z^2 + 3z + 2 = 0$ .

Корни уравнения:  $z = \frac{1}{2}$  или  $z = -2$ .

Уравнение  $4^{\sin y} = -2$  не имеет решений, а из уравнения  $4^{\sin y} = \frac{1}{2}$  получаем:

$$\sin y = -\frac{1}{2}.$$

Из второго уравнения следует, что  $\cos y \geq 0$ . Следовательно,

$$y = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z \text{ и } \cos y = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Из второго уравнения находим:  $\sqrt{3} = \sqrt{4x^2 - x}$ , откуда  $4x^2 - x - 3 = 0$ . Корни:

$$x = 1 \text{ или } x = -\frac{3}{4}.$$

$$\text{Ответ: } \left(1; -\frac{\pi}{6} + 2\pi n\right); \left(-\frac{3}{4}; -\frac{\pi}{6} + 2\pi n\right), n \in Z.$$

Содержание критерия

Содержание критерия	Балл
Обоснованно получен верный ответ	2
Первое уравнение решено верно, однако решение системы содержит ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

**C2** В правильной треугольной пирамиде  $SABC$  с основанием  $ABC$  сторона основания равна  $3\sqrt{3}$ , а боковое ребро равно 5. Найдите угол между плоскостью  $ABC$  и прямой  $MN$ , где  $N$  – середина ребра  $AC$ , а точка  $M$  делит ребро  $BS$  так, что  $BM : MS = 2 : 1$ .

Проекцией прямой  $MN$  на плоскость основания служит прямая  $BN$ , поскольку точка  $M$  проектируется на прямую  $BO$ , где  $O$  – центр основания. Значит, искомый угол  $MNB$ .

В прямоугольном треугольнике  $SOB$ :

$$BO = \frac{BC\sqrt{3}}{3} = 3, \quad SO = \sqrt{SB^2 - BO^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4.$$

Проведем перпендикуляр  $MH$  к плоскости основания.  $MH = \frac{2}{3}SO = \frac{8}{3}$ .

$$NH = NO + OH = \frac{BC\sqrt{3}}{6} + \frac{1}{3}OB = \frac{3}{2} + 1 = \frac{5}{2}.$$

Из прямоугольного треугольника  $NHM$  находим:

$$\operatorname{tg} \angle MNH = \frac{MH}{NH} = \frac{8}{3} \cdot \frac{2}{5} = \frac{16}{15}.$$

Ответ:  $\operatorname{arctg} \frac{16}{15}$ .

Содержание критерия

Содержание критерия	Балл
Обоснованно получен верный ответ	2
Найден плоский угол, равный искомому углу, ответ неверный в связи с вычислительной ошибкой	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

**C3** Решите неравенство  $\log_9(x+6) \cdot \log_x 3 \geq 1$ .

Преобразуем неравенство:

$$\frac{\log_3(x+6)}{2\log_3 x} \geq 1; \quad \log_x(x+6) \geq 2.$$

$$1 \text{ случай: } \begin{cases} x+6 \geq x^2, \\ x > 1; \end{cases} \begin{cases} x^2 - x - 6 \leq 0, \\ x > 1, \end{cases} \text{ откуда } 1 < x \leq 3.$$

$$2 \text{ случай: } \begin{cases} x^2 - x - 6 \geq 0, \\ 0 < x < 1. \end{cases} \text{ Эта система не имеет решений.}$$

Ответ:  $(1; 3]$ .

Содержание критерия

Содержание критерия	Балл
Обоснованно получен верный ответ	3
Ответ отличается от верного ошибочным включением или ошибочным исключением граничных точек найденных промежутков	2
Ответ содержит лишние промежутки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

**C4** В треугольнике  $ABC$  известно, что  $AB = 18$ ,  $BC = 16$ ,  $\cos B = \frac{4}{9}$ ,  $AH$  – высота. Через точку  $H$  проведена прямая, отсекающая от треугольника подобный ему треугольник и пересекающая сторону  $AB$  в точке  $M$ . Найдите  $HM$ .

$$BH = AB \cdot \cos B = 18 \cdot \frac{4}{9} = 8 = \frac{1}{2} BC,$$

поэтому треугольник  $ABC$  равнобедренный с основанием  $BC$ , значит,  $H$  – середина  $BC$ .

Заметим, что существует ровно два случая расположения точки  $M$  на стороне  $AB$ : либо  $\angle BHM = \angle BCA$  (рис. 1), либо  $\angle BHM = \angle BAC$  (рис. 2).

В первом из этих случаев  $HM \parallel AC$ . Тогда  $HM$  – средняя линия треугольника  $ABC$ , следовательно,  $HM = \frac{1}{2} AC = 9$ .

Пусть теперь  $\angle BHM = \angle BAC$ . Тогда треугольник  $BHM$  подобен равнобедренному треугольнику  $BAC$ , следовательно,

$$HM = HB = \frac{1}{2} BC = 8.$$

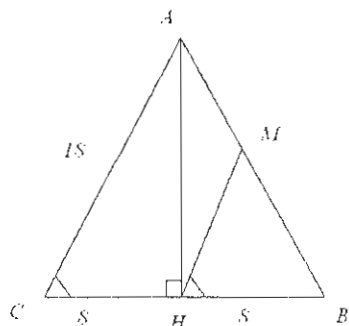


Рис 1

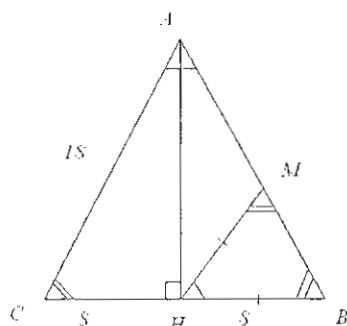


Рис 2

Ответ: 9 или 8.

Содержание критерия	Балл
Обоснованно получен верный ответ	3
Рассмотрены обе геометрические конфигурации. Хотя бы в одном случае получен верный ответ. Ответ в другом случае неверный из-за вычислительной ошибки	2
Верно и полностью рассмотрена хотя бы одна геометрическая конфигурация. Для нее получен верный ответ	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных ниже	0

**C5** Найдите наибольшее значение параметра  $a$ , при котором функция  $y = 3 + 2x - 3|ax + a + 2| + |ax + a + 7| + |x - 5|$  является неубывающей на всей числовой прямой.

Функция  $y = 3 + 2x - 3|ax + a + 2| + |ax + a + 7| + |x - 5|$  определена при всех  $x \in \mathbb{R}$ .

Предположим, что  $a > 0$ . На каждом из промежутков с границами  $-\frac{7}{a} - 1$ ,  $-\frac{2}{a} - 1$ ,  $5$  (в порядке возрастания) функция является линейной, и её график лежит на некоторой прямой.

Чтобы функция нигде не убывала, необходимо и достаточно, чтобы все возможные угловые коэффициенты этих прямых были неотрицательны.

Если  $x < -\frac{7}{a} - 1$ , то угловым коэффициентом равен  $2 + 3|a| - |a| - 1 = 2a + 1$ .

Если  $-\frac{7}{a} - 1 \leq x < -\frac{2}{a} - 1$ , то угловым коэффициентом равен  $2 + 3|a| + |a| - 1 = 4a + 1$ .

Если  $-\frac{2}{a} - 1 \leq x < 5$ , то угловым коэффициентом равен  $2 - 3|a| + |a| - 1 = -2a + 1$ .

Если  $x \geq 5$ , то угловым коэффициентом равен  $2 - 3|a| + |a| + 1 = -2a + 3$ .

Получаем систему:

$$\begin{cases} 2a + 1 \geq 0, \\ 4a + 1 \geq 0, \\ 1 - 2a \geq 0, \text{ откуда } 0 < a \leq 0,5, \\ 3 - 2a \geq 0, \\ a > 0, \end{cases}$$

Поскольку спрашивается только наибольшее значение  $a$ , случай  $a \leq 0$  рассматривать не нужно.

Ответ: 0,5.

Содержание критерия	Балл
Обоснованно получен верный ответ	4
Ответ отличается от верного вследствие арифметической ошибки	3
Обоснование содержит логическую ошибку – рассмотрены не все неравенства или при нахождении системы неравенств не указано, почему часть из них можно не рассматривать. Ответ верный или неверный вследствие этой ошибки	2
Указаны (без обоснований) необходимые и достаточные условия выполнения условий задачи, но вычисления содержат ошибки, в результате которых ответ не верный	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

- С6** Найдите наименьшее и наибольшее натуральные значения  $n$ , при которых уравнение

$$(x^2 + y^2)^{2012} = x^n \cdot y^n$$

имеет натуральные решения.

При любом  $n$  пара  $x=1, y=1$  не является решением. Поэтому

$$(xy)^n = (x^2 + y^2)^{2012} \geq (2xy)^{2012} > (xy)^{2012}.$$

Значит,  $n > 2012$ .

Предположим, что  $x \neq y$ . Тогда найдется простое число  $p$ , такое что  $x = p^k a, y = p^m b$ , числа  $a$  и  $b$  не делятся на  $p$ . Для определенности можно считать, что  $k > m \geq 0$ .

Тогда

$$\begin{aligned} (p^{2k} a^2 + p^{2m} b^2)^{2012} &= (p^{k+m} ab)^n, \\ (p^{2(k-m)} a^2 + b^2)^{2012} &= a^n b^n p^{n(k+m) - 2m \cdot 2012}. \end{aligned} \quad (1)$$

Из условий  $n > 2012$  и  $k > m$  получаем:

$$n(k+m) - 2m \cdot 2012 = (nk - 2012m) + m(n - 2012) > 0.$$

Значит, правая часть равенства (1) – целое число, которое делится на  $p$ . Левая часть на  $p$  не делится. Противоречие.

Пусть теперь  $x = y$ , тогда из равенства

$$(x^2 + x^2)^{2012} = (x^2)^n \text{ получаем: } x^{n-2012} = 2^{1006}.$$

Откуда  $x = 2^q, q = 0, 1, 2, \dots$  и  $q(n-2010) = 1006$ .

Поэтому  $n-2012$  натуральный делитель числа 1006. По условию нас интересуют только наименьшее и наибольшее возможное значение  $n$ .

Поэтому нужно взять  $n-2012=1$  и  $n-2012=1006$ , откуда  $n=2013$  и  $n=3018$ . При  $n=2013$   $x=y=2^{1006}$ , при  $n=3018$   $x=y=2$ .

Ответ: 2013, 3018.

Содержание критерия	Балл
Обоснованно получен верный ответ	4
Имеются небольшие погрешности в обосновании. Например, в приведенном решении не указано, что пара $x=1, y=1$ не является решением	3
Задача решена для случая $x=y$ . То, что $x=y$ не доказано	2
Найдено только наименьшее значение или только наибольшее значение. В обосновании и доказательствах имеются существенные пробелы	1
Все случаи решения, не удовлетворяющие ни одному из критериев, описанных выше	0