C1 Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 5\cdot 25^{\lg x}+14\cdot 5^{\lg x}-3=0, \\ \sqrt{3y-y^2}+2\sin x=0. \end{cases}$$

Сделаем замену $z=5^{\lg x}$. Из первого уравнения получаем: $5z^2+14z-3=0$.
Корни уравнения: $z=-3$ или $z=\frac{1}{5}$.

Уравнение $5^{\lg x}=-3$ не имеет решений, а из уравнения $5^{\lg x}=\frac{1}{5}$ получаем: $\operatorname{tg} x=-1$.

Из второго уравнения следует, что $\sin x\le 0$. Следовательно, $x=-\frac{\pi}{4}+2\pi n, n\in Z$ и $\sin x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Из второго уравнения находим: $\sqrt{3y-y^2}=\sqrt{2}$, откуда $y^2-3y+2=0$.
Корни: $y=1$ или $y=2$.

Ответ: $\left(-\frac{\pi}{4}+2\pi n;1\right);\left(-\frac{\pi}{4}+2\pi n;2\right)$, $n\in Z$.

Содержание критерия	Балл
Обоснованно получен верный ответ	2
Первое уравнение решено верно, однако решение системы содержит ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

C2 В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ с основанием $ABCD$ сторона основания равна $3\sqrt{2}$, а боковое ребро равно 5. Найдите угол между плоскостями ABC и ACM, где точка M делит ребро BS так, что $BM:MS=2:1$.

Треугольники MSC и MSA равны, следовательно, $MC=MA$. Треугольник AMC равнобедренный. Проведем в этом треугольнике высоту MO. O – центр основания. Диагонали квадрата перпендикулярны, следовательно, $BO\perp AC$. Таким образом, искомый линейный угол – угол BOM.

В прямоугольном треугольнике SOB: $SO=\sqrt{SB^2-BO^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4$.

Проведем перпендикуляр MH к плоскости основания. $MH=\frac{2}{3}SO=\frac{8}{3}$.

© 2010 ФГНУ «Федеральный институт педагогических измерений»
Копирование не допускается

$OH=\frac{1}{3}OB=1$.

Из прямоугольного треугольника OHM находим: $\operatorname{tg}\angle MOH=\frac{MH}{OH}=\frac{8}{3}$.

Ответ: $\operatorname{arctg}\frac{8}{3}$.

Содержание критерия	Балл
Обоснованно получен верный ответ	2
Найден плоский угол, равный искомому углу, ответ неверный в связи с вычислительной ошибкой	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

C3 Решите неравенство $\log_4(x+2)\cdot\log_x 2\le 1$.

Преобразуем неравенство:

$$\frac{\log_2(x+2)}{2\log_2 x}\le 1;\ \log_x(x+2)\le 2.$$

1 случай: $\begin{cases} x+2\le x^2, \\ x>1; \end{cases}$ $\begin{cases} x^2-x-2\ge 0, \\ x>1, \end{cases}$ откуда $x\ge 2$.

2 случай: $\begin{cases} x^2-x-2\le 0, \\ 0<x<1, \end{cases}$ откуда $0<x<1$.

Решение неравенства найдем, объединяя найденные промежутки: $0<x<1$, $x\ge 2$.

Ответ: $(0;1)$, $[2;+\infty)$.

Содержание критерия	Балл
Обоснованно получен верный ответ	3
Ответ отличается от верного ошибочным включением или ошибочным исключением граничных точек найденных промежутков	2
Ответ содержит лишние промежутки, либо один из нужных промежутков не включен в ответ	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

© 2010 ФГНУ «Федеральный институт педагогических измерений»
Копирование не допускается

C4 Точка H – основание высоты треугольника со сторонами $10, 12, 14$, опущенной на сторону, равную 12. Через точку H проведена прямая, отсекающая от треугольника подобный ему треугольник и пересекающая сторону, равную 10, в точке M. Найдите HM.

Пусть CH – высота треугольника ABC со сторонами $AB = 12, AC = 10, BC = 14$.

По теореме косинусов

$$\cos\angle BAC = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \cdot AC} = \frac{144 + 100 - 196}{2 \cdot 12 \cdot 10} = \frac{1}{5}.$$

Из прямоугольного треугольника AHC находим, что

$$AH = AC \cos\angle BAC = 10 \cdot \frac{1}{5} = 2.$$

Заметим, что существует ровно два случая расположения точки M на стороне AC: либо $\angle AHM = \angle ABC$ (рис. 1), либо $\angle AHM = \angle ACB$ (рис. 2).

В первом из этих случаев $HM \parallel BC$, треугольник AHM подобен треугольнику ABC с коэффициентом $\frac{AH}{AB} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$, следовательно,

$$HM = BC \cdot \frac{1}{6} = 14 \cdot \frac{1}{6} = \frac{7}{3}.$$

Пусть теперь $\angle AHM = \angle ACB$. Тогда треугольник AMH подобен треугольнику ABC, причем коэффициент подобия равен

$$\frac{AH}{AC} = \cos\angle BAC = \frac{1}{5},$$

следовательно,

$$HM = BC \cdot \frac{1}{5} = 14 \cdot \frac{1}{5} = \frac{14}{5}.$$

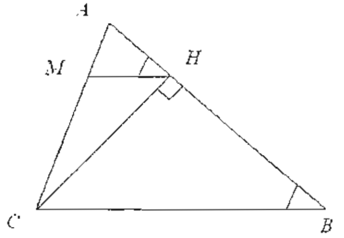

Рис. 1

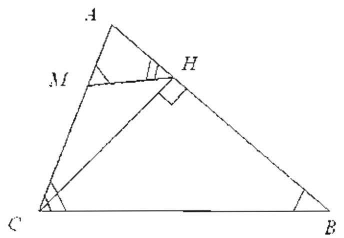

Рис. 2

Ответ: $\frac{7}{3}$ или $\frac{14}{5}$

© 2010 ФГНУ «Федеральный институт педагогических измерений»
Копирование не допускается

Содержание критерия	Балл
Обоснованно получен верный ответ	3
Рассмотрены обе геометрические конфигурации. Хотя бы в одном случае получен верный ответ. Ответ в другом случае неверный из-за вычислительной ошибки	2
Верно и полностью рассмотрена хотя бы одна геометрическая конфигурация. Для нее получен верный ответ	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных ниже	0

C5 Найдите наименьшее значение параметра a, при котором функция

$$y = 9 + 7x - 3|ax + 2| + |ax + 5| + |x + 1|$$

является неубывающей на всей числовой прямой.

Функция $y = 9 + 7x - 3|ax + 2| + |ax + 5| + |x + 1|$ определена при всех $x \in \mathbb{R}$.

Предположим, что $a < 0$. На каждом из промежутков с границами $-1; -\frac{2}{a}; -\frac{5}{a}$ (в порядке возрастания) функция является линейной, и её график лежит на некоторой прямой.

Чтобы функция нигде не убывала, необходимо и достаточно, чтобы все возможные угловые коэффициенты этих прямых были неотрицательны.

Если $x < -1$, получаем угловой коэффициент $7 + 3|a| - |a| - 1 = -2a + 6$.

Если $-1 \le x < -\frac{2}{a}$, то угловой коэффициент $7 + 3|a| - |a| + 1 = -2a + 8$.

Если $-\frac{2}{a} \le x < -\frac{5}{a}$, то угловой коэффициент $7 - 3|a| - |a| + 1 = 4a + 8$.

Если $x \ge -\frac{5}{a}$, то угловой коэффициент $7 - 3|a| + |a| + 1 = 2a + 8$.

Получаем систему

$$\begin{cases} 6 - 2a \ge 0, \\ 8 - 2a \ge 0, \\ 4a + 8 \ge 0, \text{ откуда } -2 \le a < 0. \\ 2a + 8 \ge 0, \\ a < 0, \end{cases}$$

Поскольку нас интересует только наименьшее значение a случай $a \ge 0$ рассматривать не нужно.

Ответ: -2.

© 2010 ФГНУ «Федеральный институт педагогических измерений»
Копирование не допускается

Содержание критерия	Балл
Обоснованно получен верный ответ	4
Ответ отличается от верного вследствие арифметической ошибки	3
Обоснование содержит логическую ошибку – рассмотрены не все неравенства или при нахождении системы неравенств не указано, почему часть из них можно не рассматривать. Ответ верный или неверный вследствие этой ошибки	2
Указаны (без обоснований) необходимые и достаточные условия выполнения условий задачи, но вычисления содержат ошибки, в результате которых ответ неверный	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

С6 Найдите наименьшее и наибольшее натуральные значения n, при которых уравнение

$$(x^2+y^2)^{2010}=x^n\cdot y^n$$

имеет натуральные решения.

При любом n пара $x=1, y=1$ не является решением. Поэтому

$$(xy)^n=(x^2+y^2)^{2010}\ge(2xy)^{2010}>(xy)^{2010}.$$

Значит, $n>2010$.

Предположим, что $x\ne y$. Тогда найдется простое число p, такое что $x=p^k a, y=p^m b$, и числа a и b не делятся на p. Для определенности можно считать, что $k>m\ge 0$.

Тогда

$$(p^{2k}a^2+p^{2m}b^2)^{2010}=(p^{k+m}ab)^n;$$

$$(p^{2(k-m)}a^2+b^2)^{2010}=a^n b^n p^{n(k+m)-2m\cdot 2010}. \quad (1)$$

Из условий $n>2010$ и $k>m$ получаем:

$$n(k+m)-2m\cdot 2010=(nk-2010m)+m(n-2010)>0.$$

Значит, правая часть равенства (1) – целое число, которое делится на p. Левая часть на p не делится. Противоречие.

Пусть теперь $x=y$, тогда из равенства

$$(x^2+x^2)^{2010}=(x^2)^n \text{ получаем: } x^{n-2010}=2^{1005}.$$

Откуда $x=2^q, q=0,1,2,...$ и $q(n-2010)=1005$.

Поэтому $n-2010$ натуральный делитель числа 1005. По условию нас интересуют только наименьшее и наибольшее возможное значение n. Поэтому нужно взять $n-2010=1$ и $n-2010=1005$, откуда $n=2011$ и $n=3015$. При $n=2011$ $x=y=2^{1005}$, при $n=3015$ $x=y=2$.

Ответ: 2011, 3015

© 2010 ФГНУ «Федеральный институт педагогических измерений»
Копирование не допускается

Содержание критерия	Балл
Обоснованно получен верный ответ.	4
Имеются небольшие погрешности в обосновании. Например, в приведенном решении не указано, что пара $x=1, y=1$ не является решением	3
Задача решена для случая $x=y$. То, что $x=y$ не доказано	2
Найдено только наименьшее значение или только наибольшее значение. В обосновании и доказательствах имеются существенные пробелы	1
Все случаи решения, не удовлетворяющие ни одному из критериев, описанных выше	0

© 2010 ФГНУ «Федеральный институт педагогических измерений»
Копирование не допускается

C1 Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 5\cdot 25^{\operatorname{tg} y}+14\cdot 5^{\operatorname{tg} y}-3=0, \\ \sqrt{-3x-x^2}+2\sin y=0. \end{cases}$$

Сделаем замену $z=5^{\operatorname{tg} y}$. Из первого уравнения получаем: $5z^2+14z-3=0$. Корни уравнения: $z=-3$ или $z=\frac{1}{5}$.

Уравнение $5^{\operatorname{tg} y}=-3$ не имеет решений, а из уравнения $5^{\operatorname{tg} y}=\frac{1}{5}$ получаем: $\operatorname{tg} y=-1$.

Из второго уравнения следует, что $\sin y\le 0$. Следовательно, $y=-\frac{\pi}{4}+2\pi n, n\in Z$ и $\sin y=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Из второго уравнения находим: $\sqrt{-3x-x^2}=\sqrt{2}$, откуда $x^2+3x+2=0$. Корни: $x=-1$ или $x=-2$.

Ответ: $\left(-1;-\frac{\pi}{4}+2\pi n\right);\left(-2;-\frac{\pi}{4}+2\pi n\right), n\in Z$.

Содержание критерия	Балл
Обоснованно получен верный ответ	2
Первое уравнение решено верно, однако решение системы содержит ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

C2 В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ с основанием $ABCD$ сторона основания равна $6\sqrt{2}$, а боковое ребро равно 10. Найдите угол между плоскостями ABC и ACM, где точка M делит ребро BS так, что $BM:MS=2:1$.

Треугольники MSC и MSA равны, следовательно, $MC=MA$. Треугольник AMC равнобедренный. Проведем в этом треугольнике высоту MO. O – центр основания. Диагонали квадрата перпендикулярны, следовательно, $BO\perp AC$. Таким образом, искомый линейный угол – угол BOM.

В прямоугольном треугольнике SOB: $SO=\sqrt{SB^2-BO^2}=\sqrt{10^2-6^2}=8$.

Проведем перпендикуляр MH к плоскости основания. $MH=\frac{2}{3}SO=\frac{16}{3}$.

$OH=\frac{1}{3}OB=2$.

© 2010 ФГНУ «Федеральный институт педагогических измерений»
Копирование не допускается

Из прямоугольного треугольника OHM находим: $\operatorname{tg}\angle MOH=\frac{MH}{OH}=\frac{8}{3}$.

Ответ: $\operatorname{arctg}\frac{8}{3}$.

Содержание критерия	Балл
Обоснованно получен верный ответ	2
Найден плоский угол, равный искомому углу, ответ неверный в связи с вычислительной ошибкой	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

C3 Решите неравенство $\log_4 y\cdot\log_{y-2}2\le 1$.

Преобразуем неравенство:

$$\frac{\log_2 y}{2\log_2(y-2)}\le 1;\quad \log_{y-2}y\le 2.$$

1 случай: $\begin{cases} y\le (y-2)^2, \\ y-2>1; \end{cases}$ $\begin{cases} y^2-5y+4\ge 0, \\ y>3, \end{cases}$ откуда $y\ge 4$.

2 случай: $\begin{cases} y^2-5y+4\le 0, \\ 2<y<3, \end{cases}$ откуда $2<y<3$.

Решение неравенства найдем, объединяя найденные промежутки: $2<y<3, y\ge 4$.

Ответ: $(2;3),[4;+\infty)$.

Содержание критерия	Балл
Обоснованно получен верный ответ	3
Ответ отличается от верного ошибочным включением или ошибочным исключением граничных точек найденных промежутков	2
Ответ содержит лишние промежутки, либо один из нужных промежутков не включен в ответ	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

© 2010 ФГНУ «Федеральный институт педагогических измерений»
Копирование не допускается

С4 Площадь трапеции $ABCD$ равна 240. Диагонали пересекаются в точке O, отрезки, соединяющие середину P основания AD с вершинами B и C, пересекаются с диагоналями трапеции в точках M и N. Найдите площадь четырехугольника $OMPN$, если одно из оснований трапеции втрое больше другого.

Пусть $AD = 3BC$ (рис. 1). Положим $BC = a$, $AD = 3a$, $OC = x$. Треугольник COB подобен треугольнику AOD с коэффициентом $\frac{BC}{AD} = \frac{1}{3}$, а треугольник CMB подобен треугольнику AMP с коэффициентом $\frac{BC}{AP} = \frac{a}{\frac{3a}{2}} = \frac{2}{3}$, поэтому

$$OA = 3x,\ AC = OA + OC = 3x + x = 4x,\ MC = \frac{2}{5}\cdot 4x = \frac{8}{5}x,$$

$$OM = MC - OC = \frac{8}{5}x - x = \frac{3}{5}x,$$

значит, $\frac{OM}{OA} = \frac{\frac{3}{5}x}{3x} = \frac{1}{5}$. Аналогично, $\frac{ON}{OD} = \frac{1}{5}$.

Пусть h – высота трапеции. Тогда

$$\frac{a+3a}{2}h = 2ah = 240,\ ah = 120,\ S_{AOD} = \frac{1}{2}\cdot 3a\cdot\frac{3}{4}h = \frac{9}{8}ah = 135,$$

$$S_{DNP} = S_{AMP} = \frac{AM}{AO}\cdot\frac{AP}{AD}S_{AOD} = \frac{4}{5}\cdot\frac{1}{2}\cdot 135 = 54.$$

Следовательно,

$$S_{OMPN} = S_{AOD} - S_{DNP} - S_{AMP} = 135 - 54 - 54 = 27.$$

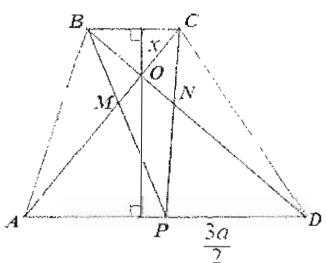

Рис. 1

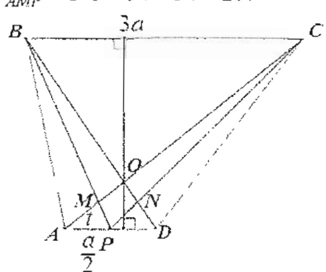

Рис. 2

Рассмотрим случай, когда $BC = 3AD$ (рис. 2). Положим $BC = 3a$, $AD = a$, $AM = t$. Треугольник AOD подобен треугольнику COB с коэффициентом $\frac{AD}{BC} = \frac{1}{3}$, а треугольник AMP подобен треугольнику CMB с коэффициентом $\frac{AP}{BC} = \frac{\frac{a}{2}}{3a} = \frac{1}{6}$, поэтому

$$MC = 6t,\ AC = AM + MC = 6t + t = 7t,\ OA = \frac{1}{4}AC = \frac{1}{4}\cdot 7t = \frac{7}{4}t,$$

значит, $\frac{AM}{AO} = \frac{t}{\frac{7}{4}t} = \frac{4}{7}$. Аналогично, $\frac{DN}{DO} = \frac{4}{7}$.

Пусть h – высота трапеции. Тогда

$$\frac{a+3a}{2}h = 2ah = 240,\ ah = 120,\ S_{AOD} = \frac{1}{2}\cdot a\cdot\frac{1}{4}h = \frac{1}{8}ah = 15,$$

$$S_{DNP} = S_{AMP} = \frac{AM}{AO}\cdot\frac{AP}{AD}S_{AOD} = \frac{4}{7}\cdot\frac{1}{2}\cdot 15 = \frac{30}{7}.$$

Следовательно, $S_{OMPN} = S_{AOD} - S_{DNP} - S_{AMP} = 15 - \frac{30}{7} - \frac{30}{7} = \frac{45}{7}$.

Ответ: 27 или $\frac{45}{7}$.

Содержание критерия	Балл
Обосиованно получен верный ответ	3
Рассмотрены обе геометрические конфигурации. Хотя бы в одном случае получен верный ответ. Ответ в другом случае неверный из-за вычислительной ошибки	2
Верно и полностью рассмотрена хотя бы одна геометрическая конфигурация. Для нее получен верный ответ	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных ниже	0

С5 Найдите наименьшее значение параметра a, при котором функция

$$y = -7 + 3x - 3|ax - 1| + |ax - 2| + |x - 7|$$

является неубывающей на всей числовой прямой.

Функция $y = -7 + 3x - 3|ax-1| + |ax-2| + |x-7|$ определена при всех $x \in \mathbb{R}$.

Предположим, что $a < 0$. На каждом из промежутков с границами $\frac{2}{a}, \frac{1}{a}, 7$ (в порядке возрастания) функция является линейной, и её график лежит на некоторой прямой.

© 2010 ФГНУ «Федеральный институт педагогических измерений»
Копирование не допускается

© 2010 ФГНУ «Федеральный институт педагогических измерений»
Копирование не допускается

Чтобы функция нигде не убывала, необходимо и достаточно, чтобы все возможные угловые коэффициенты этих прямых были неотрицательны.

Если $x < \frac{2}{a}$, то угловой коэффициент равен $3+3|a|-|a|-1=2a+2$.

Если $\frac{2}{a} \le x < \frac{1}{a}$, то угловой коэффициент равен $3+3|a|+|a|-1=4a+2$.

Если $\frac{1}{a} \le x < 7$, то угловой коэффициент равен $3-3|a|+|a|-1=-2a+2$.

Если $x \ge 7$, то угловой коэффициент равен $3-3|a|+|a|+1=-2a+4$.

Получаем систему:

$$\begin{cases} 2a+2\ge 0, \\ 4a+2\ge 0, \\ 2-2a\ge 0, \quad \text{откуда } -0,5\le a<0. \\ 4-2a\ge 0, \\ a<0, \end{cases}$$

Поскольку спрашивается только наименьшее значение a, случай $a \ge 0$ рассматривать не нужно.

Ответ: ~~−0,5~~ − 1

Содержание критерия	Балл
Обоснованно получен верный ответ	4
Ответ отличается от верного вследствие арифметической ошибки	3
Обоснование содержит логическую ошибку – рассмотрены не все неравенства или при нахождении системы неравенств не указано, почему часть из них можно не рассматривать. Ответ верный или неверный вследствие этой ошибки	2
Указаны (без обоснований) необходимые и достаточные условия выполнения условий задачи, но вычисления содержат ошибки, в результате которых ответ неверный	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

C6 Найдите наименьшее и наибольшее натуральные значения n, при которых уравнение

$$\frac{2010\ln\left(x^2+y^2\right)}{n}=\ln(xy)$$

имеет натуральные решения.

При положительных x и y получаем уравнение

$$\left(x^2+y^2\right)^{2010}=\left(xy\right)^n.$$

© 2010 ФГНУ «Федеральный институт педагогических измерений»
Копирование не допускается

При любом n пара $x=1, y=1$ не является решением. Поэтому

$$(xy)^n=(x^2+y^2)^{2010}\ge(2xy)^{2010}>(xy)^{2010}.$$

Значит, $n>2010$.

Предположим, что $x\ne y$. Тогда найдется простое число p, такое что $x=p^k a, y=p^m b$, и числа a и b не делятся на p. Для определенности можно считать, что $k>m\ge 0$.

Тогда

$$(p^{2k}a^2+p^{2m}b^2)^{2010}=(p^{k+m}ab)^n;$$

$$(p^{2(k-m)}a^2+b^2)^{2010}=a^n b^n p^{n(k+m)-2m\cdot 2010}. \quad (1)$$

Из условий $n>2010$ и $k>m$ получаем:

$$n(k+m)-2m\cdot 2010=(nk-2010m)+m(n-2010)>0.$$

Значит, правая часть равенства (1) – целое число, которое делится на p. Левая часть на p не делится. Противоречие.

Пусть теперь $x=y$, тогда из равенства

$$(x^2+x^2)^{2010}=(x^2)^n \text{ получаем: } x^{n-2010}=2^{1005}.$$

Откуда $x=2^q, q=0,1,2,\ldots$ и

$$q(n-2010)=1005.$$

Поэтому $n-2010$ натуральный делитель числа 1005. По условию нас интересуют только наименьшее и наибольшее возможное значение n. Поэтому нужно взять $n-2010=1$ и $n-2010=1005$, откуда $n=2011$ и $n=3015$. При $n=2011$ $x=y=2^{1005}$, при $n=3015$ $x=y=2$.

Ответ: 2011, 3015.

Содержание критерия	Балл
Обоснованно получен верный ответ	4
Имеются небольшие погрешности в обосновании. Например, в приведенном решении не указано, что пара $x=1, y=1$ не является решением	3
Задача решена для случая $x=y$. То, что $x=y$ не доказано	2
Найдено только наименьшее значение или только наибольшее значение. В обосновании и доказательствах имеются существенные пробелы	1
Все случаи решения, не удовлетворяющие ни одному из критериев, описанных выше	0

© 2010 ФГНУ «Федеральный институт педагогических измерений»
Копирование не допускается

C1 Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2\cdot 16^{\sin x}+3\cdot 4^{\sin x}+2=0, \\ 2\cos x-\sqrt{4y^2+y}=0. \end{cases}$$

Сделаем замену $z=4^{\sin x}$. Из первого уравнения получаем: $2z^2+3z+2=0$.

Корни уравнения: $z=\frac{1}{2}$ или $z=-2$.

Уравнение $4^{\sin x}=-2$ не имеет решений, а из уравнения $4^{\sin x}=\frac{1}{2}$ получаем: $\sin x=-\frac{1}{2}$.

Из второго уравнения следует, что $\cos x\geq 0$. Следовательно, $x=-\frac{\pi}{6}+2\pi n, n\in Z$ и $\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Из второго уравнения находим: $\sqrt{3}=\sqrt{4y^2+y}$, откуда $4y^2+y-3=0$.

Корни: $y=-1$ или $y=\frac{3}{4}$.

Ответ: $\left(-\frac{\pi}{6}+2\pi n;-1\right);\left(-\frac{\pi}{6}+2\pi n;\ \frac{3}{4}\right), n\in Z$.

Содержание критерия	Балл
Обоснованно получен верный ответ	2
Первое уравнение решено верно, однако решение системы содержит ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

C2 В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с основанием ABC сторона основания равна $6\sqrt{3}$, а боковое ребро равно 10. Найдите угол между плоскостью ABC и прямой MN, где N – середина ребра AC, а точка M делит ребро BS так, что $BM:MS=2:1$.

Проекцией прямой MN на плоскость основания служит прямая BN, поскольку точка M проектируется на прямую BO, где O – центр основания. Значит, искомый угол MNB.

В прямоугольном треугольнике SOB:

$$BO=\frac{BC\sqrt{3}}{3}=6,\quad SO=\sqrt{SB^2-BO^2}=\sqrt{10^2-6^2}=8.$$

© 2010 ФГНУ «Федеральный институт педагогических измерений»
Копирование не допускается

Проведем перпендикуляр MH к плоскости основания. $MH=\frac{2}{3}SO=\frac{16}{3}$.

$$NH=NO+OH=\frac{BC\sqrt{3}}{6}+\frac{1}{3}OB=3+2=5.$$

Из прямоугольного треугольника NHM находим:

$$\operatorname{tg}\angle MNH=\frac{MH}{NH}=\frac{16}{3\cdot 5}=\frac{16}{15}.$$

Ответ: $\operatorname{arctg}\frac{16}{15}$.

Содержание критерия	Балл
Обоснованно получен верный ответ	2
Найден плоский угол, равный искомому углу, ответ неверный в связи с вычислительной ошибкой	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

C3 Решите неравенство $\log_9 y\cdot\log_{y-6}3\geq 1$.

Преобразуем неравенство:

$$\frac{\log_3 y}{2\log_3(y-6)}\geq 1;\quad \log_{y-6}y\geq 2.$$

1 случай: $\begin{cases} y\geq (y-6)^2, \\ y-6>1; \end{cases}$ $\begin{cases} y^2-13y+36\leq 0, \\ y>7, \end{cases}$ откуда $7<y\leq 9$.

2 случай: $\begin{cases} y^2-13y+36\geq 0, \\ 0<y-6<1. \end{cases}$ В этом случае решений нет.

Ответ: $(7;9]$.

Содержание критерия	Балл
Обоснованно получен верный ответ	3
Ответ отличается от верного ошибочным включением или ошибочным исключением граничных точек найденных промежутков	2
Ответ содержит лишние промежутки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

© 2010 ФГНУ «Федеральный институт педагогических измерений»
Копирование не допускается

C4 Площадь трапеции $ABCD$ равна 90. Диагонали пересекаются в точке O, отрезки, соединяющие середину P основания AD с вершинами B и C, пересекаются с диагоналями трапеции в точках M и N. Найдите площадь четырехугольника $OMPN$, если одно из оснований трапеции вдвое больше другого.

Пусть $AD = 2BC$ (рис. 1). Четырехугольники $ABCP$ и $BCDP$ – параллелограммы, поэтому M и N – середины BP и CP, значит, CM и BN – медианы треугольника BPC. Пусть h – высота трапеции. Положим $BC = a$, $AD = 2a$. Тогда

$$\frac{a+2a}{2}h = \frac{3}{2}ah = 90, \quad ah = 60.$$

Следовательно,

$$S_{OMPN} = \frac{1}{3}S_{BPC} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}ah = \frac{1}{6}\cdot 60 = 10.$$

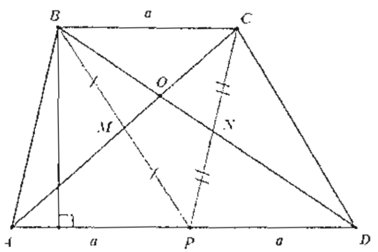

Рис. 1

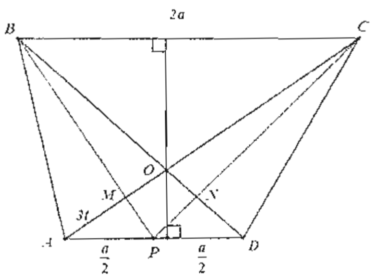

Рис. 2

Пусть теперь $BC = 2AD$ (рис. 2). Пусть h – высота трапеции. Положим $AD = a$, $BC = 2a$, $AM = 3t$. Тогда $ah = 60$.

Треугольник AOD подобен треугольнику COB с коэффициентом $\frac{1}{2}$, а треугольник AMP – треугольнику CMB с коэффициентом $\frac{AP}{BC} = \frac{1}{4}$. Тогда

$$MC = 4AM = 12t, \quad AC = AM + MC = 3t + 12t = 15t,$$

$$AO = \frac{1}{3}AC = 5t, \quad \frac{AM}{AO} = \frac{3t}{5t} = \frac{3}{5}.$$

Аналогично, $\frac{DN}{DO} = \frac{3}{5}$. Высота треугольника AOD, проведенная из вершины O, равна $\frac{1}{3}h$, значит,

© 2010 ФГНУ «Федеральный институт педагогических измерений»
Копирование не допускается

$$S_{AOD} = \frac{1}{2}a\cdot\frac{1}{3}h = \frac{1}{6}ah = \frac{1}{6}\cdot 60 = 10,$$

$$S_{DNP} = S_{AMP} = \frac{AM}{AO}\cdot\frac{AP}{AD}S_{AOD} = \frac{3}{5}\cdot\frac{1}{2}\cdot 10 = 3.$$

Следовательно,

$$S_{OMPN} = S_{AOD} - S_{DNP} - S_{AMP} = 10 - 3 - 3 = 4.$$

Ответ: 10 или 4.

Содержание критерия	Балл
Обоснованно получен верный ответ	3
Рассмотрены обе геометрические конфигурации. Хотя бы в одном случае получен верный ответ. Ответ в другом случае неверный из-за вычислительной ошибки	2
Верно и полностью рассмотрена хотя бы одна геометрическая конфигурация. Для нее получен верный ответ	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных ниже	0

C5 Найдите наибольшее значение параметра a, при котором функция $y = 3 + 3x - 3|ax + a - 2| + |ax + a - 6| + |x + 4|$ является неубывающей на всей числовой прямой.

Функция $y = 3 + 3x - 3|ax + a - 2| + |ax + a - 6| + |x + 4|$ определена при всех $x \in \mathbb{R}$. Предположим, что $a > 0$. На каждом из промежутков с границами -4, $\frac{2}{a} - 1$, $\frac{6}{a} - 1$ (в порядке возрастания) функция является линейной, и её график лежит на некоторой прямой.

Чтобы функция нигде не убывала, необходимо и достаточно, чтобы все возможные угловые коэффициенты этих прямых были неотрицательны.

Если $x < -4$, то угловой коэффициент равен $3 + 3|a| - |a| - 1 = 2a + 2$.

Если $-4 \le x < \frac{2}{a} - 1$, то угловой коэффициент равен $3 + 3|a| - |a| + 1 = 2a + 4$.

Если $\frac{2}{a} - 1 \le x < \frac{6}{a} - 1$, то угловой коэффициент равен $3 - 3|a| - |a| + 1 = -4a + 4$.

Если $x \ge \frac{6}{a} - 1$, то угловой коэффициент равен $3 - 3|a| + |a| + 1 = -2a + 4$.

Получаем систему:

© 2010 ФГНУ «Федеральный институт педагогических измерений»
Копирование не допускается

$$\begin{cases} 2a+2\ge 0,\\ 2a+4\ge 0,\\ 4-4a\ge 0, \quad \text{откуда } 0<a\le 1.\\ 4-2a\ge 0,\\ a>0, \end{cases}$$

Поскольку спрашивается только наибольшее значение a, случай $a\le 0$ рассматривать не нужно.

Ответ: 1.

Содержание критерия	Балл
Обоснованно получен верный ответ	4
Ответ отличается от верного вследствие арифметической ошибки	3
Обоснование содержит логическую ошибку – рассмотрены не все неравенства или при нахождении системы неравенств не указано, почему часть из них можно не рассматривать. Ответ верный или неверный вследствие этой ошибки	2
Указаны (без обоснований) необходимые и достаточные условия выполнения условий задачи, но вычисления содержат ошибки, в результате которых ответ не верный	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

C6 Найдите наименьшее и наибольшее натуральные значения n, при которых уравнение

$$\frac{2012\ln(x^2+y^2)}{n}=\ln(xy)$$

имеет натуральные решения.

При положительных x, y, получаем уравнение

$$(x^2+y^2)^{2012}=(xy)^n.$$

При любом n пара $x=1, y=1$ не является решением. Поэтому

$$(xy)^n=(x^2+y^2)^{2012}\ge(2xy)^{2012}>(xy)^{2012}.$$

Значит, $n>2012$.

Предположим, что $x\ne y$. Тогда найдется простое число p, такое что $x=p^k a, y=p^m b$, числа a и b не делятся на p. Для определенности можно считать, что $k>m\ge 0$.

Тогда

$$(p^{2k}a^2+p^{2m}b^2)^{2012}=(p^{k+m}ab)^n;$$

© 2010 ФГНУ «Федеральный институт педагогических измерений»
Копирование не допускается

$$(p^{2(k-m)}a^2+b^2)^{2012}=a^n b^n p^{n(k+m)-2m\cdot 2012}. \qquad (1)$$

Из условий $n>2012$ и $k>m$ получаем:

$$n(k+m)-2m\cdot 2012=(nk-2012m)+m(n-2012)>0.$$

Значит, правая часть равенства (1) – целое число, которое делится на p. Левая часть на p не делится. Противоречие.

Пусть теперь $x=y$, тогда из равенства

$$(x^2+x^2)^{2012}=(x^2)^n \text{ получаем: } x^{n-2012}=2^{1006}.$$

Откуда $x=2^q, q=0,1,2,\ldots$ и $q(n-2010)=1006$.

Поэтому $n-2012$ натуральный делитель числа 1006. По условию нас интересуют только наименьшее и наибольшее возможное значение n. Поэтому нужно взять $n-2012=1$ и $n-2012=1006$, откуда $n=2013$ и $n=3018$. При $n=2013$ $x=y=2^{1006}$, при $n=3018$ $x=y=2$.

Ответ: $2013, 3018$.

Содержание критерия	Балл
Обоснованно получен верный ответ.	4
Имеются небольшие погрешности в обосновании. Например, в приведенном решении не указано, что пара $x=1, y=1$ не является решением	3
Задача решена для случая $x=y$. То, что $x=y$ не доказано	2
Найдено только наименьшее значение или только наибольшее значение. В обосновании и доказательствах имеются существенные пробелы	1
Все случаи решения, не удовлетворяющие ни одному из критериев, описанных выше	0

© 2010 ФГНУ «Федеральный институт педагогических измерений»
Копирование не допускается

C1 Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2\cdot 16^{\sin y}+3\cdot 4^{\sin y}+2=0, \\ 2\cos y-\sqrt{4x^2-x}=0. \end{cases}$$

Сделаем замену $z=4^{\sin y}$. Из первого уравнения получаем: $2z^2+3z+2=0$.

Корни уравнения: $z=\frac{1}{2}$ или $z=-2$.

Уравнение $4^{\sin y}=-2$ не имеет решений, а из уравнения $4^{\sin y}=\frac{1}{2}$ получаем: $\sin y=-\frac{1}{2}$.

Из второго уравнения следует, что $\cos y\geq 0$. Следовательно, $y=-\frac{\pi}{6}+2\pi n, n\in Z$ и $\cos y=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Из второго уравнения находим: $\sqrt{3}=\sqrt{4x^2-x}$, откуда $4x^2-x-3=0$. Корни: $x=1$ или $x=-\frac{3}{4}$.

Ответ: $\left(1;-\frac{\pi}{6}+2\pi n\right);\left(-\frac{3}{4};-\frac{\pi}{6}+2\pi n\right), n\in Z$.

Содержание критерия	Балл
Обоснованно получен верный ответ	2
Первое уравнение решено верно, однако решение системы содержит ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

C2 В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с основанием ABC сторона основания равна $3\sqrt{3}$, а боковое ребро равно 5. Найдите угол между плоскостью ABC и прямой MN, где N – середина ребра AC, а точка M делит ребро BS так, что $BM:MS=2:1$.

Проекцией прямой MN на плоскость основания служит прямая BN, поскольку точка M проектируется на прямую BO, где O – центр основания. Значит, искомый угол MNB.

В прямоугольном треугольнике SOB:

$$BO=\frac{BC\sqrt{3}}{3}=3,\quad SO=\sqrt{SB^2-BO^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4.$$

Проведем перпендикуляр MH к плоскости основания. $MH=\frac{2}{3}SO=\frac{8}{3}$.

© 2010 ФГНУ «Федеральный институт педагогических измерений»
Копирование не допускается

$$NH=NO+OH=\frac{BC\sqrt{3}}{6}+\frac{1}{3}OB=\frac{3}{2}+1=\frac{5}{2}.$$

Из прямоугольного треугольника NHM находим:

$$\operatorname{tg}\angle MNH=\frac{MH}{NH}=\frac{8}{3}\cdot\frac{2}{5}=\frac{16}{15}.$$

Ответ: $\operatorname{arctg}\frac{16}{15}$.

Содержание критерия	Балл
Обоснованно получен верный ответ	2
Найден плоский угол, равный искомому углу, ответ неверный в связи с вычислительной ошибкой	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

C3 Решите неравенство $\log_9(x+6)\cdot\log_x 3\geq 1$.

Преобразуем неравенство:

$$\frac{\log_3(x+6)}{2\log_3 x}\geq 1;\quad \log_x(x+6)\geq 2.$$

1 случай: $\begin{cases} x+6\geq x^2, \\ x>1; \end{cases}$ $\begin{cases} x^2-x-6\leq 0, \\ x>1, \end{cases}$ откуда $1<x\leq 3$.

2 случай: $\begin{cases} x^2-x-6\geq 0, \\ 0<x<1. \end{cases}$ Эта система не имеет решений.

Ответ: $(1;3]$.

Содержание критерия	Балл
Обоснованно получен верный ответ	3
Ответ отличается от верного ошибочным включением или ошибочным исключением граничных точек найденных промежутков	2
Ответ содержит лишние промежутки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

© 2010 ФГНУ «Федеральный институт педагогических измерений»
Копирование не допускается

C4 В треугольнике ABC известно, что $AB = 18, BC = 16, \cos B = \frac{4}{9}$, AH – высота. Через точку H проведена прямая, отсекающая от треугольника подобный ему треугольник и пересекающая сторону AB в точке M. Найдите HM.

$$BH = AB, \ \cos B = 18 \cdot \frac{4}{9} = 8 = \frac{1}{2} BC,$$

поэтому треугольник ABC равнобедренный с основанием BC, значит, H – середина BC.

Заметим, что существует ровно два случая расположения точки M на стороне AB: либо $\angle BHM = \angle BCA$ (рис. 1), либо $\angle BHM = \angle BAC$ (рис.2).

В первом из этих случаев $HM \parallel AC$. Тогда HM – средняя линия треугольника ABC, следовательно, $HM = \frac{1}{2} AC = 9$.

Пусть теперь $\angle BHM = \angle BAC$. Тогда треугольник BHM подобен равнобедренному треугольнику BAC, следовательно,

$$HM = HB = \frac{1}{2} BC = 8.$$

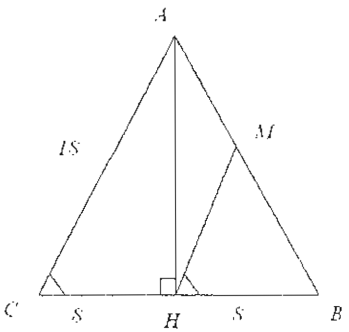

Рис 1

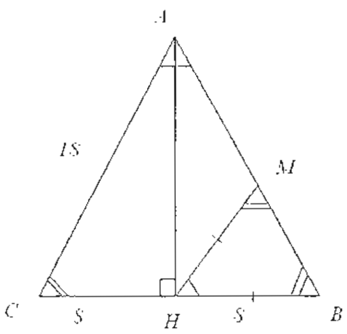

Рис 2

Ответ: 9 или 8.

© 2010 ФГНУ «Федеральный институт педагогических измерений»
Копирование не допускается

Содержание критерия	Балл
Обоснованно получен верный ответ	3
Рассмотрены обе геометрические конфигурации. Хотя бы в одном случае получен верный ответ. Ответ в другом случае неверный из-за вычислительной ошибки	2
Верно и полностью рассмотрена хотя бы одна геометрическая конфигурация. Для нее получен верный ответ	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных ниже	0

C5 Найдите наибольшее значение параметра a, при котором функция $y = 3 + 2x - 3|ax + a + 2| + |ax + a + 7| + |x - 5|$ является неубывающей на всей числовой прямой.

Функция $y = 3 + 2x - 3|ax + a + 2| + |ax + a + 7| + |x - 5|$ определена при всех $x \in \mathbb{R}$.

Предположим, что $a > 0$. На каждом из промежутков с границами $-\frac{7}{a} - 1$, $-\frac{2}{a} - 1$, 5 (в порядке возрастания) функция является линейной, и её график лежит на некоторой прямой.

Чтобы функция нигде не убывала, необходимо и достаточно, чтобы все возможные угловые коэффициенты этих прямых были неотрицательны.

Если $x < -\frac{7}{a} - 1$, то угловой коэффициент равен $2 + 3|a| - |a| - 1 = 2a + 1$.

Если $-\frac{7}{a} - 1 \le x < -\frac{2}{a} - 1$, то угловой коэффициент равен $2 + 3|a| + |a| - 1 = 4a + 1$.

Если $-\frac{2}{a} - 1 \le x < 5$, то угловой коэффициент равен $2 - 3|a| + |a| - 1 = -2a + 1$.

Если $x \ge 5$, то угловой коэффициент равен $2 - 3|a| + |a| + 1 = -2a + 3$.

Получаем систему:

$$\begin{cases} 2a + 1 \ge 0, \\ 4a + 1 \ge 0, \\ 1 - 2a \ge 0, \\ 3 - 2a \ge 0, \\ a > 0, \end{cases} \quad \text{откуда} \quad 0 < a \le 0{,}5.$$

Поскольку спрашивается только наибольшее значение a, случай $a \le 0$ рассматривать не нужно.

Ответ: 0,5.

© 2010 ФГНУ «Федеральный институт педагогических измерений»
Копирование не допускается

Содержание критерия	Балл
Обоснованно получен верный ответ	4
Ответ отличается от верного вследствие арифметической ошибки	3
Обоснование содержит логическую ошибку – рассмотрены не все неравенства или при нахождении системы неравенств не указано, почему часть из них можно не рассматривать. Ответ верный или неверный вследствие этой ошибки	2
Указаны (без обоснований) необходимые и достаточные условия выполнения условий задачи, но вычисления содержат ошибки, в результате которых ответ не верный	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

C6 Найдите наименьшее и наибольшее натуральные значения n, при которых уравнение

$$(x^2+y^2)^{2012}=x^n\cdot y^n$$

имеет натуральные решения.

При любом n пара $x=1, y=1$ не является решением. Поэтому

$$(xy)^n=(x^2+y^2)^{2012}\geq(2xy)^{2012}>(xy)^{2012}.$$

Значит, $n>2012$.

Предположим, что $x\neq y$. Тогда найдется простое число p, такое что $x=p^k a, y=p^m b$, числа a и b не делятся на p. Для определенности можно считать, что $k>m\geq 0$.

Тогда

$$(p^{2k}a^2+p^{2m}b^2)^{2012}=(p^{k+m}ab)^n.$$

$$(p^{2(k-m)}a^2+b^2)^{2012}=a^n b^n p^{n(k+m)-2m\cdot 2012}. \quad (1)$$

Из условий $n>2012$ и $k>m$ получаем:

$$n(k+m)-2m\cdot 2012=(nk-2012m)+m(n-2012)>0.$$

Значит, правая часть равенства (1) – целое число, которое делится на p. Левая часть на p не делится. Противоречие.

Пусть теперь $x=y$, тогда из равенства

$$(x^2+x^2)^{2012}=(x^2)^n \text{ получаем: } x^{n-2012}=2^{1006}.$$

Откуда $x=2^q, q=0,1,2,\ldots$ и $q(n-2010)=1006$.

Поэтому $n-2012$ натуральный делитель числа 1006. По условию нас интересуют только наименьшее и наибольшее возможное значение n.

© 2010 ФГНУ «Федеральный институт педагогических измерений»
Копирование не допускается

Поэтому нужно взять $n-2012=1$ и $n-2012=1006$, откуда $n=2013$ и $n=3018$. При $n=2013$ $x=y=2^{1006}$, при $n=3018$ $x=y=2$.

Ответ: 2013, 3018.

Содержание критерия	Балл
Обоснованно получен верный ответ	4
Имеются небольшие погрешности в обосновании. Например, в приведенном решении не указано, что пара $x=1, y=1$ не является решением	3
Задача решена для случая $x=y$. То, что $x=y$ не доказано	2
Найдено только наименьшее значение или только наибольшее значение. В обосновании и доказательствах имеются существенные пробелы	1
Все случаи решения, не удовлетворяющие ни одному из критериев, описанных выше	0

© 2010 ФГНУ «Федеральный институт педагогических измерений»
Копирование не допускается