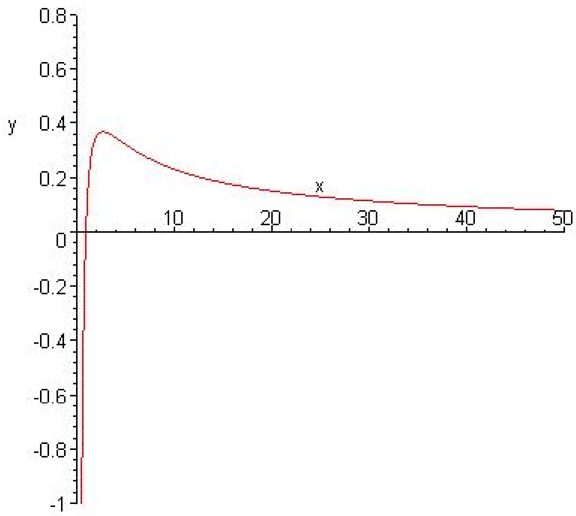
Найдите все пары натуральных n и k таких, что k<n и $\left(\frac{1}{n}\right)^k = \left(\frac{1}{k}\right)^n$

Уравнение: $n^k = k^n \quad \to \quad k\ln n = n\ln k \quad \to \quad \frac{\ln n}{n} = \frac{\ln k}{k};$

Рассмотрим функцию $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}; \quad f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2} \quad \to \quad x = e$ - точка максимума.

Функция имеет единственный ноль при $x = 1$



$\frac{\ln n}{n} = \frac{\ln k}{k}$ - т.е. значения функции f(x) одинаковые при различных значениях аргумента. Это возможно, только если одно из этих значений левее точки максимума, а другое – правее. Максимум в точке $x = e = 2{,}7..$, значит это значение (с учетом натуральности) может быть только 1 или 2. 1- не подходит, а 2 – единственное возможное решение.

Тогда с учетом k<n $\quad k = 2, \quad n = 4$.