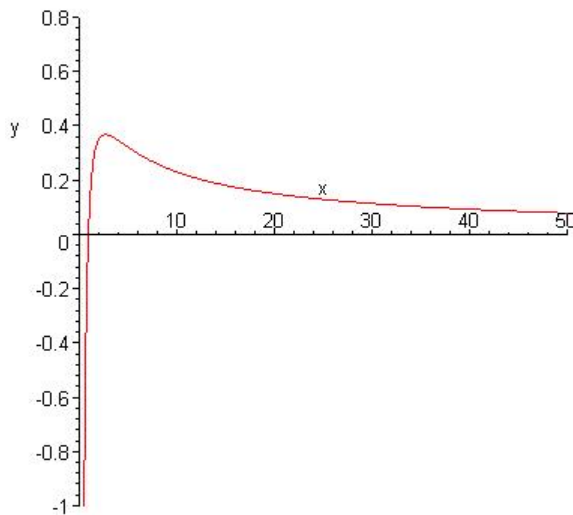


Найдите все пары натуральных n и k таких, что $k < n$ и $\left(\frac{1}{n}\right)^k = \left(\frac{1}{k}\right)^n$

Уравнение: $n^k = k^n \rightarrow k \ln n = n \ln k \rightarrow \frac{\ln n}{n} = \frac{\ln k}{k}$;

Рассмотрим функцию $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$; $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2} \rightarrow x = e$ - точка максимума.

Функция имеет единственный ноль при $x = 1$



$$\frac{\ln n}{n} = \frac{\ln k}{k} \text{ - т.е. значения функции } f(x)$$

одинаковые при различных значениях аргумента. Это возможно, только если одно из этих значений левее точки максимума, а другое – правее. Максимум в точке $x = e = 2,7..$, значит это значение (с учетом натуральности) может быть только 1 или 2. 1- не подходит, а 2 – единственное возможное решение.

Тогда с учетом $k < n$ $k = 2$, $n = 4$.