Вариант 2 С5

Найдите все значения *а*, при каждом из которых функция

$$f(x)=x^2+4x+\left|x^2-\frac{3}{2}x-1\right|-a$$

Принимает только неотрицательные значения.

$$x^2-\frac{3}{2}x-1=0 \quad \to \quad x=2;-\frac{1}{2}$$

1) $x\in\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)\cup(2;\infty)$ $\quad f(x)=2x^2+\frac{5}{2}x-1-a$

Т.к. ветви параболы $f(x)$ направлены вверх, вершина $x=-\frac{5}{8}$ для выполнения условия задачи необходимо и достаточно, чтобы

$$f\left(-\frac{5}{8}\right)\ge 0 \quad \to \quad \frac{25}{32}-\frac{25}{16}-1-a\ge 0 \quad \to \quad -\frac{57}{32}-a\ge 0 \quad \to \quad a\le -\frac{57}{32}$$

2) $x\in\left(-\frac{1}{2};2\right)$ $\quad f(x)=\frac{11}{2}x+1-a$

Функция $f(x)$ - возрастающая прямая, таким образом, для выполнения условия задачи необходимо и достаточно, чтобы $f\left(-\frac{1}{2}\right)\ge 0$

$$-\frac{11}{4}+1-a\ge 0 \quad \to \quad a\le -\frac{7}{4}$$

Ответ: $a\le -\frac{57}{32}$

Вариант 3 С5

При каких а уравнение

$cos\left(\sqrt{a^2-x^2}\right)=1$

имеет ровно 8 корней?

$\sqrt{a^2-x^2}=2\pi n \quad n\in Z$

$a^2-x^2=4\pi^2n^2 \quad n\in Z$

$x^2=a^2-4\pi^2n^2 \quad n\in Z$

$x^2=a^2-4\pi^2n^2=a^2;a^2-4\pi^2;a^2-16\pi^2;a^2-36\pi^2-$ *должны давать восемь искомых корней*

Необходимо чтобы $a^2-36\pi^2>0$*, а* $a^2-64\pi^2<0$

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}a>6\pi\\ a<-6\pi\end{array}\right.\\ -8\pi<a<8\pi\end{cases}\Rightarrow a\in(-8\pi;-6\pi)\cup(6\pi;8\pi)$$

Ответ : $a\in(-8\pi;-6\pi)\cup(6\pi;8\pi)$

Вариант 4 С5

Найдите все значения *а*, при каждом из которых уравнение

$3x+\left|2x+|a-x|\right|=7|x+2|$

имеет хотя бы один корень.

Рассмотрим функции

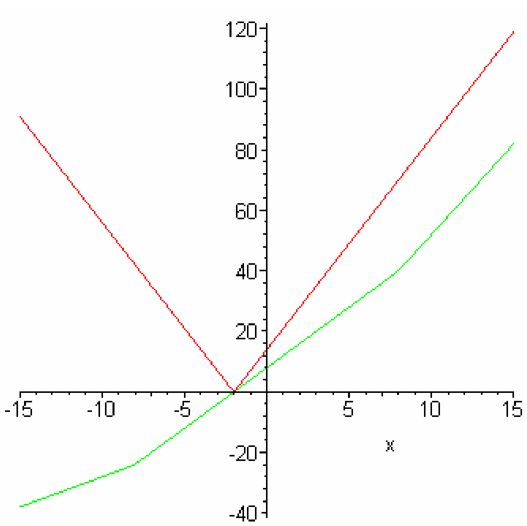
$f(x)=3x+\left|2x+|a-x|\right|$ и $g(x)=7|x+2|$

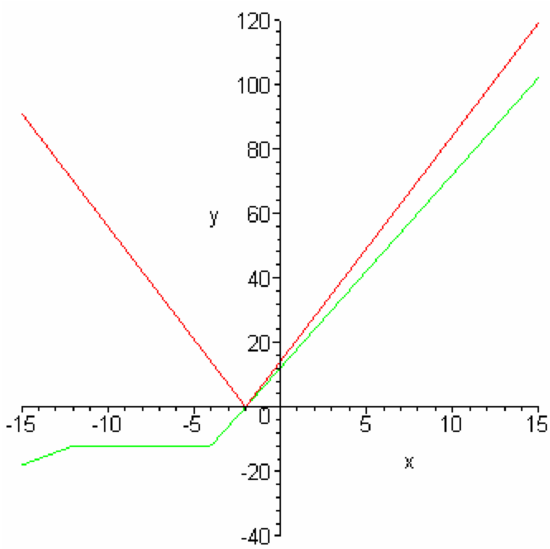
1. $x\ge a \quad \to \quad f(x)=3x+|3x-a|=\begin{cases} a, & x\le \dfrac{a}{3} \\ 6x-a, & x>\dfrac{a}{3}\end{cases}$

2. $x<a \quad \to \quad f(x)=3x+|x+a|=\begin{cases} 2x-a, & x\le -a \\ 4x+a, & x>-a\end{cases}$

Заметим, что угловой коэффициент ломаной $g(x)$ равен 7 или -7, а ломаной $f(x)$ 2, 4 или 6 при $a>0$ и 0, 6 и 2 при $a<0$

На первом рисунке $a>0$, на втором - $a<0$





Для выполнения условия задачи необходимо:

$f(-2)=-6+\left|-4+|a+2|\right|\ge 0$

$\left|-4+|a+2|\right|\ge 6 \quad \left[\begin{array}{l} -4+|a+2|\ge 6 \\ -4+|a+2|\le -6\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} |a+2|\ge 10 \\ |a+2|\le -2\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} a+2\ge 10 \\ a+2\le -10\end{array}\right. \\ \text{невозможно}\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} a\ge 8 \\ a\le -12\end{array}\right.$

Ответ: $a\in(-\infty;-12]\cup[8;\infty)$

Вариант 5 С5

Найдите все значения *a*, при каждом из которых уравнение

$$5x-\left|3x-|x+a|\right|=10|x-2|$$

имеет хотя бы один корень.

Рассмотрим функции

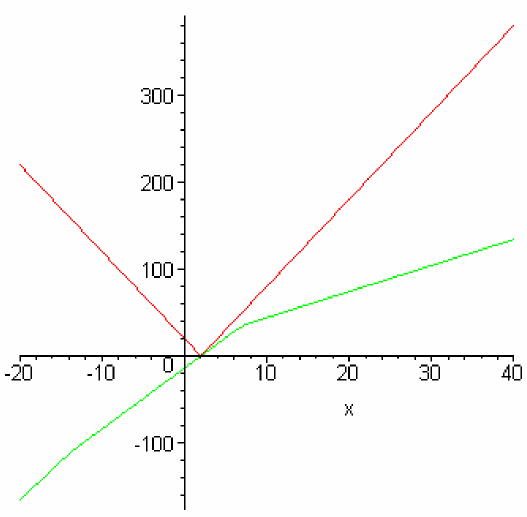
$f(x)=5x-\left|3x-|x+a|\right|$ и $g(x)=10|x-2|$

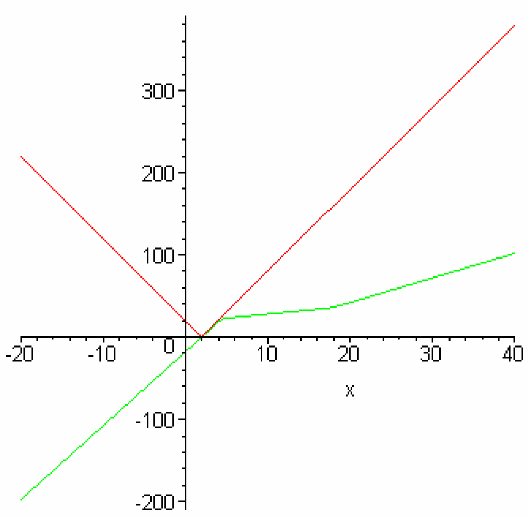
1. $x\ge -a \quad\rightarrow\quad f(x)=5x-|2x+a|=\begin{cases}7x-a, & x\le -\dfrac{a}{2}\\ 3x-a, & x>-\dfrac{a}{2}\end{cases}$

2. $x< -a \quad\rightarrow\quad f(x)=5x-|4x-a|=\begin{cases}9x+a, & x\le \dfrac{a}{4}\\ x+a, & x>\dfrac{a}{4}\end{cases}$

Заметим, что угловой коэффициент ломаной $g(x)$ равен 10 или -10, а ломаной $f(x)$ 7, 3 или 1 при $a>0$ и 3, 9 и 1 при $a<0$

На первом рисунке $a>0$, на втором - $a<0$





Для выполнения условия задачи необходимо:

$$f(2)=10-\left|6-|a+2|\right|\ge 0$$

$$\left|6-|a+2|\right|\le 10$$

$$-10\le 6-|a+2|\le 10$$

$$-16\le -|a+2|\le 4 \quad\rightarrow\quad -4\le |a+2|\le 16 \quad\rightarrow\quad -16\le a+2\le 16 \quad\rightarrow\quad -18\le a\le 14$$

Ответ: $a\in[-18;14]$

Вариант 6 С5

Найдите все такие *a*, что наименьшее значение функции
$f(x)=4|x-a|+|x^2+2x-3|$ меньше 4.

Варианты раскрытия модулей:

$$f(x)=4x-4a+x^2+2x-3=x^2+6x-4a-3$$

$$f(x)=-4x+4a+x^2+2x-3=x^2-2x+4a-3$$

$$f(x)=-4x+4a-x^2-2x+3=-x^2-6x+4a+3$$

$$f(x)=4x-4a-x^2-2x+3=-x^2+2x-4a+3$$

Наименьшее значение этой функции может быть либо в вершине параболы, либо в граничных точках, т.е. $x=-1,\ x=1,\ x=-3,\ x=a$, или в минимумах функций, получающихся при раскрытии модулей, т.е. опять же в точках $x=1,\ x=-3$.

Тогда для выполнения условия задачи необходимо

$$\left[\begin{array}{l} f(-1)<4 \\ f(1)<4 \\ f(-3)<4 \\ f(a)<4 \end{array}\right. \rightarrow \left[\begin{array}{l} 4|-1-a|+4<4 \\ 4|1-a|<4 \\ 4|-3-a|<4 \\ |a^2+2a-3|<4 \end{array}\right. \rightarrow \left[\begin{array}{l} |-1-a|<0 \\ -1<1-a<1 \\ -1<-3-a<1 \\ -4<a^2+2a-3<4 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} 0<a<2 \\ -4<a<-2 \\ \begin{cases} a^2+2a-7<0 \\ a^2+2a+1>0 \end{cases} \end{array}\right. \rightarrow \left[\begin{array}{l} 0<a<2 \\ -4<a<-2 \\ -1-2\sqrt{2}<a<-1+2\sqrt{2}, \quad a\neq -1 \end{array}\right.$$

Итого: $a\in(-4;-1)\cup(-1;2)$

http://alexlarin.narod.ru

Вариант 7 С5

При каких а уравнение

$\sin\left(\sqrt{a^2-x^2}\right)=0$

имеет ровно 8 корней?

$\sqrt{a^2-x^2}=\pi n \quad n\in Z$

$a^2-x^2=\pi^2n^2 \quad n\in Z$

$x^2=a^2-\pi^2n^2 \quad n\in Z$

$x^2=a^2-\pi^2n^2=a^2;a^2-\pi^2;a^2-4\pi^2;a^2-9\pi^2$ *– должны давать восемь искомых корней*

Необходимо чтобы $a^2-9\pi^2>0$, *а* $a^2-16\pi^2<0$

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}a>3\pi\\ a<-3\pi\end{array}\right.\\ -4\pi<a<4\pi\end{cases}\Rightarrow a\in(-4\pi;-3\pi)\cup(3\pi;4\pi)$$

Ответ: $a\in(-4\pi;-3\pi)\cup(3\pi;4\pi)$

http://alexlarin.narod.ru

Вариант 8 С5

Найдите все значения *а*, при каждом из которых общие решения неравенств $y+2x\ge a$ и $y-x\ge 2a$ являются решениями неравенства $2y-x>a+3$.

Найдем точку пересечения прямых $y=-2x+a$ и $y=x+2a \to x_0=-\frac{a}{3};\ y_0=\frac{5a}{3};$

Решением системы заданных неравенств будет область, расположенная выше каждой их этих прямых.

Угловой коэффициент прямой $y=\frac{x}{2}+\frac{a+3}{2}$ равен ½, для выполнения условия задачи достаточно выполнения условия:

$$\frac{x_0}{2}+\frac{a+3}{2}<y_0$$

$$x_0+a+3<2y_0$$

$$-\frac{a}{3}+a+3<\frac{10a}{3}$$

$$-a+3a+9<10a$$

$$8a>9$$

$$a>\frac{9}{8}$$

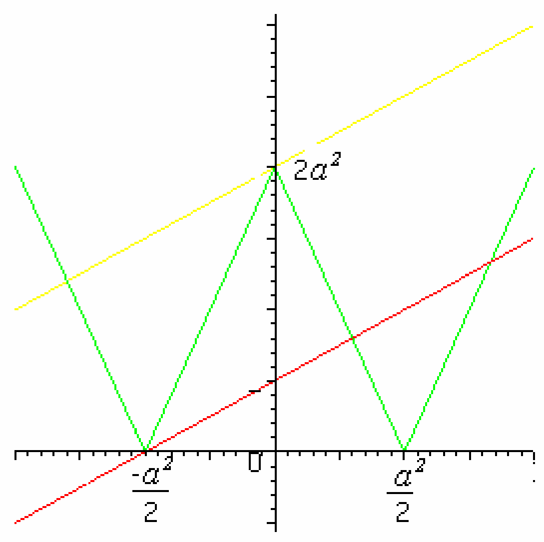
Ответ: $a>\frac{9}{8}$

http://alexlarin.narod.ru

Вариант 9 С5

Найдите все значения *а*, при каждом из которых функция $f(x)=2\left|2|x|-a^2\right|-x+a$ имеет ровно три нуля функции.

Рассмотрим схематические графики двух функций: $g(x)=2\left|2|x|-a^2\right|$
$f(x)=x-a$



На рисунке отмечены два положения прямой $f(x)$, при которых графики данных функций имеют три точки пересечения, т.е. выполняется условие задачи.
Аналитически (подставляя в исходное уравнение):

$$1)\quad f(0)=2a^2 \quad \to \quad 2\left|0-a^2\right|-0+a=0; \to 2a^2+a=0 \quad \to \quad a=0;\ a=-\frac{1}{2};$$

$$2)\quad f\left(-\frac{a^2}{2}\right)=0 \quad \to \quad 0+\frac{a^2}{2}+a=0; \quad \to \quad a=0;\ a=-2;$$

Заметим, что при $a=0 \quad \to \quad 4|x|=x$ - не может иметь трех корней.

Ответ: $a=-\frac{1}{2};\quad a=-2.$

http://alexlarin.narod.ru

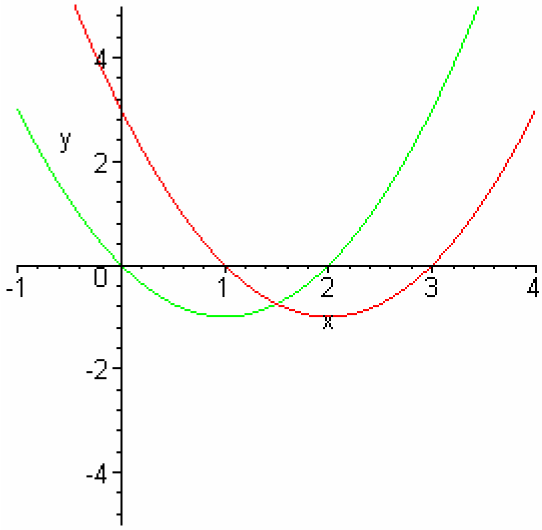
Вариант 10 С5

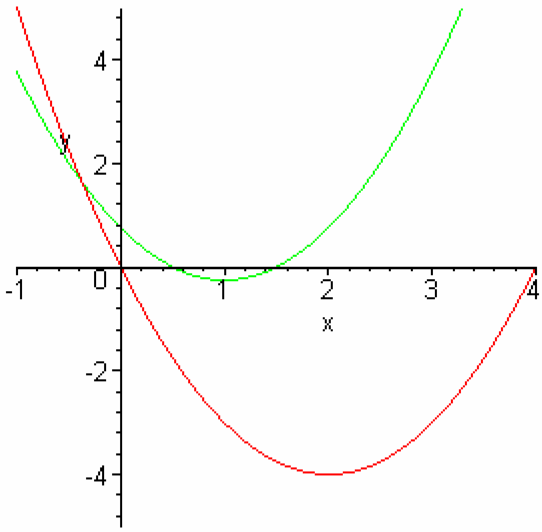
Найдите все значения *а*, при каждом из которых общие решения неравенств $x^2-2x\le a-1$ и $x^2-4x\le 1-4a$ образуют на числовой оси отрезок длиной единица.

$$\begin{cases} x^2-2x\le a-1 \\ x^2-4x\le 1-4a \end{cases} \quad \begin{cases} x^2-2x+1-a\le 0 \\ x^2-4x-1+4a\le 0 \end{cases} \quad \begin{cases} (x-1)^2-a\le 0 \\ (x-2)^2+4a-5\le 0 \end{cases}$$

Очевидно, что для выполнения условия необходимо $a\ge 0;\quad 5-4a\ge 0;\quad \to \quad a\in\left[0;\frac{5}{4}\right]$

Для выполнения условия задачи возможно три случая взаимного расположения парабол





Для первого случая разность большего корня уравнения $(x-1)^2-a=0$ и меньшего корня уравнения $(x-2)^2+4a-5=0$ должна равняться 1.

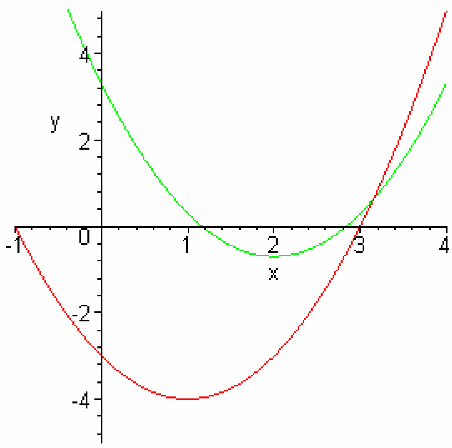
Т.е. $1+\sqrt{a}-\left(2-\sqrt{5-4a}\right)=1;\quad \sqrt{a}+\sqrt{5-4a}=2;\quad 5-4a=4-4\sqrt{a}+a;$

$5a-4\sqrt{a}-1=0\quad \to \quad \sqrt{a}=1\quad \to \quad a=1;$

Для второго случая разность корней первого уравнения должна быть равна 1.

Т.е. $\sqrt{a}=\frac{1}{2};\quad \to \quad a=\frac{1}{4};$ Корни первого уравнения будут равны 0,5 и 1,5;корни второго уравнения будут равны 0 и 4, т.е. условия выполняются.

В принципе, необходимо рассмотреть еще один случай:



Тогда разность корней второго уравнения должна быть равна 1, при этом $a = \frac{19}{16}$;

И еще должно выполняться условие $2 + \sqrt{5 - 4a} \le 1 + \sqrt{a}$, тогда

$-1 + \sqrt{\frac{19}{16}} \ge \sqrt{5 - \frac{19}{4}} \quad \to \quad \frac{-4 + \sqrt{19}}{4} \ge \frac{1}{2} \quad \to \quad \sqrt{19} \ge 6$, что невозможно.

Ответ: $a = 1$; $a = \frac{1}{4}$;

http://alexlarin.narod.ru