Вариант 2 С3

Решите неравенство

$$log_{\frac{3x-1}{x+2}}(2x^2+x-1) \ge log_{\frac{3x-1}{x+2}}(11x-6-3x^2)$$

Сначала ограничения на основание логарифма:

$$\frac{3x-1}{x+2} > 0 \quad \to \quad x \in (-\infty;-2) \cup (1/3;\infty)$$

$$\frac{3x-1}{x+2} \ne 1 \quad \to \quad x \ne \frac{3}{2}$$

Еще ограничения:

$$\begin{cases} 2x^2+x-1>0 \\ -3x^2+11x-6>0 \end{cases} \quad \to \quad \begin{cases} x \in (-\infty;-1) \cup (0{,}5;\infty) \\ x \in (2/3;3) \end{cases} \quad \to \quad x \in (2/3;3) \qquad (1)$$

Все вместе дает $x \in \left(\frac{2}{3};3\right), x \ne \frac{3}{2}$.

Теперь само неравенство:

$$log_{\frac{3x-1}{x+2}}(2x^2+x-1) - log_{\frac{3x-1}{x+2}}(11x-6-3x^2) \ge 0$$

$$log_{\frac{3x-1}{x+2}} \frac{2x^2+x-1}{-3x^2+11x-6} \ge 0$$

1) Случай $\frac{3x-1}{x+2} > 1 \quad \to \quad \frac{2x-3}{x+2} > 0 \quad \to \quad x \in (-\infty;-2) \cup \left(\frac{3}{2};\infty\right)$

С учетом (1): $x \in \left(\frac{3}{2};3\right)$

Получаем:

$$\frac{2x^2+x-1}{-3x^2+11x-6} \ge 1 \quad \to \quad \frac{2x^2+x-1+3x^2-11x+6}{-3x^2+11x-6} \ge 0 \quad \to \quad \frac{5x^2-10x+5}{-3x^2+11x-6} \ge 0$$

$$\frac{x^2-2x+1}{3x^2-11x+6} \le 0 \quad \to \quad \frac{(x-1)^2}{3(x-3)\left(x-\frac{2}{3}\right)} \le 0 \quad x \in \left(\frac{2}{3};3\right)$$

Т.к. $x \in \left(\frac{3}{2};3\right)$, то решение в этом случае имеет вид $x \in \left(\frac{3}{2};3\right)$.

2) Случай $\frac{3x-1}{x+2} < 1 \quad \to \quad \frac{2x-3}{x+2} < 0 \quad \to \quad x \in \left(-2;\frac{3}{2}\right)$

С учетом (1): $x \in \left(\frac{2}{3};\frac{3}{2}\right)$

Получаем:

$$\frac{2x^2+x-1}{-3x^2+11x-6}\le 1 \quad\to\quad \frac{2x^2+x-1+3x^2-11x+6}{-3x^2+11x-6}\le 0 \quad\to\quad \frac{5x^2-10x+5}{-3x^2+11x-6}\le 0$$

$$\frac{x^2-2x+1}{3x^2-11x+6}\ge 0 \quad\to\quad \frac{(x-1)^2}{3(x-3)\left(x-\frac{2}{3}\right)}\ge 0 \quad x\in\left(-\infty;\frac{2}{3}\right)\cup(3;\infty)\cup\{1\}$$

Т.к. $x\in\left(\frac{2}{3};\frac{3}{2}\right)$, то решение в этом случае имеет вид $x=1$.

Окончательно: $x\in\{1\}\cup\left(\frac{3}{2};3\right)$.

http://alexlarin.narod.ru

Вариант 3 С3

Решите неравенство

$$\frac{4^{x^2+3x-2}-(0{,}5)^{2x^2+2x-1}}{5^x-1}\le 0$$

Рассмотрим сначала случай $5^x-1>0 \quad\to\quad 5^x>1 \quad\to\quad x>0$

Тогда $4^{x^2+3x-2}-(0{,}5)^{2x^2+2x-1}\le 0$

$4^{x^2+3x-2}\le(0{,}5)^{2x^2+2x-1} \quad\to\quad 2^{2x^2+6x-4}\le 2^{-2x^2-2x+1}$

$2x^2+6x-4\le -2x^2-2x+1 \quad\to\quad 4x^2+8x-5\le 0 \quad\to\quad x\in\left[-\frac{5}{2};\frac{1}{2}\right]$

Т.к. $x>0$, то $x\in\left(0;\frac{1}{2}\right]$.

Теперь случай $5^x-1<0 \quad\to\quad 5^x<1 \quad\to\quad x<0$

Тогда $4^{x^2+3x-2}-(0{,}5)^{2x^2+2x-1}\ge 0$

$4^{x^2+3x-2}\ge(0{,}5)^{2x^2+2x-1} \quad\to\quad 2^{2x^2+6x-4}\ge 2^{-2x^2-2x+1}$

$2x^2+6x-4\ge -2x^2-2x+1 \quad\to\quad 4x^2+8x-5\ge 0 \quad\to\quad x\in\left(-\infty;-\frac{5}{2}\right]\cup\left[\frac{1}{2};\infty\right)$

Т.к. $x<0$, то $x\in x\in\left(-\infty;-\frac{5}{2}\right]$.

Ответ: $x\in\left(-\infty;-\frac{5}{2}\right]\cup\left(0;\frac{1}{2}\right]$.

http://alexlarin.narod.ru

Вариант 4 С3

Решите неравенство: $\dfrac{\log_{0,2}\dfrac{1}{2x-1}+\log_5(2-x)}{\log_5(2x-1)+\log_{0,2}\dfrac{1}{3-2x}}\geq 0$

Сначала ограничения:

$$\begin{cases}2x-1>0\\2-x>0\\3-2x>0\\\log_5(2x-1)\neq-\log_5(3-2x)\end{cases}\rightarrow\begin{cases}x>\dfrac{1}{2}\\x<2\\x<\dfrac{3}{2}\\6x-3-4x^2+2x-1\neq 0\end{cases}\rightarrow\begin{cases}\dfrac{1}{2}<x<\dfrac{3}{2}\\x\neq 1\end{cases}$$

Теперь само неравенство:

$$\frac{\log_5(2x-1)+\log_5(2-x)}{\log_5(2x-1)+\log_5(3-2x)}\geq 0$$

$$\frac{\log_5(4x-2x^2-2+x)}{\log_5(6x-4x^2-3+2x)}\geq 0$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}-2x^2+5x-2\leq 1\\-4x^2+8x-3<1\end{cases}\\\begin{cases}-2x^2-5x-2\geq 1\\-4x^2+8x-3>1\end{cases}\end{array}\right.\rightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2x^2-5x+3\geq 0\\4x^2-8x+4>0\end{cases}\\\begin{cases}2x^2+5x+3\leq 0\\4x^2-8x+4<0\end{cases}\end{array}\right.\rightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2(x-1)\left(x-\dfrac{3}{2}\right)\geq 0\\(x-2)^2>0\end{cases}\\\text{нет решений}\end{array}\right.\rightarrow$$

$$\begin{cases}x\leq 1, x\geq\dfrac{3}{2}\\x\neq 2\end{cases}$$

С учетом ограничений получаем $\dfrac{1}{2}<x<1$

Ответ: $\dfrac{1}{2}<x<1$

Вариант 5 С5

Решите неравенство: $log_{2x+3} x^2 < 1$

Сначала ограничения:

$$\begin{cases} x \neq 0 \\ 2x+3>0 \\ 2x+3 \neq 1 \end{cases} \to \begin{cases} x \neq 0 \\ x > -\dfrac{3}{2} \\ x \neq 1 \end{cases}$$

Теперь само неравенство:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2x+3>1 \\ x^2 < 2x+3 \end{cases} \\ \begin{cases} 2x+3<1 \\ x^2 > 2x+3 \end{cases} \end{array}\right. \to \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x>-1 \\ x^2-2x-3<0 \end{cases} \\ \begin{cases} x<-1 \\ x^2-2x-3>0 \end{cases} \end{array}\right. \to \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x>-1 \\ -1<x<3 \end{cases} \\ \begin{cases} x<-1 \\ x<-1, x>3 \end{cases} \end{array}\right. \to \left[\begin{array}{l} -1<x<3 \\ x<-1 \end{array}\right.$$

С учетом ограничений получаем: $x \in \left(-\dfrac{3}{2};-1\right) \cup (-1;0) \cup (0;3)$

Ответ: $x \in \left(-\dfrac{3}{2};-1\right) \cup (-1;0) \cup (0;3)$

Вариант 6 С3

Решите неравенство: $log_x\left(log_9(3^x-9)\right)<1$

Сначала ограничения:

$$\begin{cases} x>0 \\ x\neq 1 \\ log_9(3^x-9)>0 \\ 3^x-9>0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x>0 \\ x\neq 1 \\ 3^x-9>1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x>0 \\ x\neq 1 \\ x>log_3 10 \end{cases} \rightarrow x>log_3 10$$

Теперь само неравенство:

Заметим, что т.к. $x>log_3 10$, то $x>1$, тогда $log_9(3^x-9)<x$.

$3^x-9<9^x$

$9^x-3^x+9>0$

$D=1-36<0$

т.е. неравенство выполнено при любом *x*.

Ответ: $x\in\left(log_3 10;\infty\right)$

Вариант 7 С3

Решите неравенство: $\dfrac{\log_2\left(3\cdot 2^{x-1}-1\right)}{x}\ge 1$

Сначала ограничения:

$$\begin{cases} x\ne 0 \\ 3\cdot 2^{x-1}-1>0 \end{cases} \to \begin{cases} x\ne 0 \\ 2^{x-1}>\dfrac{1}{3} \end{cases} \to \begin{cases} x\ne 0 \\ x-1>-\log_2 3 \end{cases} \to \begin{cases} x\ne 0 \\ x>\log_2\dfrac{2}{3} \end{cases}$$

Теперь само неравенство:

$$\frac{\log_2\left(3\cdot 2^{x-1}-1\right)-x}{x}\ge 0$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \log_2\left(3\cdot 2^{x-1}-1\right)-x\ge 0 \\ x>0 \end{cases} \\ \begin{cases} \log_2\left(3\cdot 2^{x-1}-1\right)-x\le 0 \\ x<0 \end{cases} \end{array}\right. \to \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \dfrac{3}{2}2^x-1\ge 2^x \\ x>0 \end{cases} \\ \begin{cases} \dfrac{3}{2}2^x-1\le 2^x \\ x<0 \end{cases} \end{array}\right. \to \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \dfrac{1}{2}2^x\ge 1 \\ x>0 \end{cases} \\ \begin{cases} \dfrac{1}{2}2^x\le 1 \\ x<0 \end{cases} \end{array}\right. \to \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\ge 1 \\ x>0 \end{cases} \\ \begin{cases} x\le 1 \\ x<0 \end{cases} \end{array}\right. \to \left[\begin{array}{l} x\ge 1 \\ x<0 \end{array}\right.$$

С учетом ограничений: $x\in\left(\log_2\dfrac{2}{3};0\right)\cup[1;\infty)$

Ответ: $x\in\left(\log_2\dfrac{2}{3};0\right)\cup[1;\infty)$

http://alexlarin.narod.ru

Вариант 8 С3

Решите неравенство:

$$\log_5(x+2)+\log_5(1-x)\le\log_5((1-x)(x^2-8x-8))$$

Сначала ограничения:

$$\begin{cases}x+2>0\\1-x>0\\(1-x)(x^2-8x-8)>0\end{cases}\to\begin{cases}x>-2\\x<1\\x^2-8x-8>0\end{cases}\to\begin{cases}x>-2\\x<1\\x<4-2\sqrt{6};\quad x>4+2\sqrt{6}\end{cases}\to$$

$$\to\quad x\in\left(-2;\,4-2\sqrt{6}\right)$$

Теперь само неравенство:

$$\log_5(x+2)(1-x)\le\log_5((1-x)(x^2-8x-8))$$
$$(x+2)(1-x)\le(1-x)(x^2-8x-8)$$
$$(1-x)(x^2-9x-10)\ge 0$$
$$(x+1)(x-1)(x-10)\le 0$$
$$x\in(-\infty;-1]\cup[1;10]$$

С учетом ограничений: $x\in\left(-2;-1\right]$

Ответ: $x\in\left(-2;-1\right]$

Вариант 9 С3

Решите неравенство: $log_{\frac{x}{3}}\left(log_x \sqrt{3-x}\right) \geq 0$.

Сначала ограничения:

$$\begin{cases} x>0 \\ 3-x>0 \\ x \neq 1 \\ log_x \sqrt{3-x}>0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x>0 \\ x<3 \\ x \neq 1 \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0<x<1 \\ \sqrt{3-x}<1 \end{cases} \\ \begin{cases} x>1 \\ \sqrt{3-x}>1 \end{cases} \end{array}\right. \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x>0 \\ x<3 \\ x \neq 1 \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0<x<1 \\ x>2 \end{cases} \\ \begin{cases} x>1 \\ x<2 \end{cases} \end{array}\right. \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 0<x<3 \\ x \neq 1 \\ 1<x<2 \end{cases} \rightarrow 1<x<2$$

Заметим, что при этих условиях $0<\frac{x}{3}<1$

Тогда само неравенство:

$$log_x \sqrt{3-x} \leq 1 \rightarrow \sqrt{3-x} \leq x \rightarrow 3-x \leq x^2 \rightarrow x^2+x-3 \geq 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow x \leq \frac{-1-\sqrt{13}}{2} \quad и \quad x \geq \frac{-1+\sqrt{13}}{2}$$

Окончательно: $x \in \left[\frac{\sqrt{13}-1}{2};2\right)$

Ответ: $x \in \left[\frac{\sqrt{13}-1}{2};2\right)$

http://alexlarin.narod.ru

Вариант 10 С3

Решите неравенство: $\log_{x+1}(19+18x-x^2)-\frac{1}{16}\log^2_{x+1}(x-19)^2 \geq 2$

Сначала ограничения:

$$\begin{cases} x+1>0 \\ x+1\neq 1 \\ x\neq 19 \\ 19+18x-x^2>0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x>-1 \\ x\neq 0 \\ x\neq 19 \\ -1<x<19 \end{cases} \rightarrow x\in(-1;0)\cup(0;19)$$

Теперь само неравенство:

$$\log_{x+1}(x+1)+\log_{x+1}(19-x)-\frac{1}{4}\log^2_{x+1}(19-x)\geq 2$$

$$\frac{1}{4}\log^2_{x+1}(19-x)-\log_{x+1}(19-x)+1\leq 0$$

$$\left(\frac{1}{2}\log_{x+1}(19-x)-1\right)^2\leq 0$$

$$\log_{x+1}(19-x)=2$$

$$19-x=x^2+2x+1$$

$$x^2+3x-18=0$$

$$x=-6;3$$

С учетом ограничений $x=3$

Ответ: $x=3$