Диагностическая работа №5 С5

Найдите все значения параметра *a*, при каждом их которых уравнение

$$x^2-(|a+5|-|a-5|)x+(a-12)(a+12)=0$$

Имеет два различных отрицательных корня.

Наличие двух различных корней определяется условием

$$D=(|a+5|-|a-5|)^2-4(a^2-144)>0$$

1) То, что корни отрицательные, определяется по теореме Виета:

$$\begin{cases} a^2-144>0 \\ |a+5|-|a-5|<0 \end{cases} \quad \begin{cases} a>12,\ a<-12 \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a+5-a+5<0 \\ a\ge 5 \end{cases} \\ \begin{cases} a+5+a-5<0 \\ -5\le a<5 \end{cases} \\ \begin{cases} -a-5+a-5<0 \\ a<-5 \end{cases} \end{array}\right. \end{cases} \quad \begin{cases} a>12,\ a<-12 \\ \left[\begin{array}{l} -5\le a<0 \\ a<-5 \end{array}\right. \end{cases} \quad \begin{cases} a>12,\ a<-12 \\ a<0 \end{cases} \quad a<-12$$

2) Теперь дискриминант:

$$D=a^2+10a+25-2|a^2-25|+a^2-10a+25-4a^2+576>0$$

$$\text{с учетом } a<-12:$$

$$-2a^2+50-2a^2+50+576>0$$

$$-4a^2+676>0$$

$$a^2-169<0$$

$$-13<a<13$$

Окончательно получаем: $-13<a<-12$.   http://alexlarin.narod.ru

Диагностическая работа №6 С5

Найдите все значения параметра *a*, при каждом из которых уравнение
$|1-ax| = 1+(1-2a)x+ax^2$ имеет единственный корень.

1) $ax^2-2ax+x+1=1-ax$ при $1-ax \ge 0$

$ax^2-ax+x=0$

$x(ax-a+1)=0$

$x=0 \quad x=\dfrac{a-1}{a}$

Видим, что корень $x=0$ вообще не зависит от параметра, а значит, других корней быть не должно для выполнения условия задачи.
Корень будет единственным, если $a=0$ (второй корень не существует), $a=1$ (второй корень совпадает с первым), $1-a\cdot\dfrac{a-1}{a}=2-a<0; \quad a>2$ (второй корень не удовлетворяет условию раскрытия модуля).

2) $ax^2-2ax+x+1=-1+ax$ при $1-ax<0$

$ax^2-(3a-1)x+2=0$

Рассматривать будем только те случаи, которые удовлетворяют условиям, полученным в п.1, т.е.
при $a=0$ не выполняется условие $1-ax<0$
при $a=1 \quad x>1 \quad x^2-2x+2=0$ нет корней
при $a>2 \quad D=(3a-1)^2-8a=9a^2-14a+1>36-28+1=9$, т.е. уравнение будет иметь два корня. (При $a>2$ дискриминант будет монотонно возрастать)

Больший из корней $\dfrac{3a-1+\sqrt{D}}{2a}$.

Рассмотрим условие $1-ax<0$

$1-\dfrac{3a-1+\sqrt{D}}{2}<0$

$2-3a+1-\sqrt{D}<0$

$\sqrt{D}>3-3a$

Очевидно, что при $a>2$ это условие выполнится, т.е. по крайней мере еще один корень будет.

Значит, условию задачи удовлетворяет только условие $x=0; \quad x=1.$

aalleexx

Диагностическая работа №7 С5

Найдите наибольшее значение параметра *b*, при котором неравенство

$\sqrt{b^5}(8x-x^2-16)+\dfrac{\sqrt{b}}{8x-x^2-16}\ge -\dfrac{2}{3}b|\cos\pi x|$ имеет хотя бы одно решение.

Очевидно, что $b\ge 0$

$$0\le|\cos\pi x|\le 1$$

$$0\le\frac{2}{3}|\cos\pi x|\le\frac{2}{3}$$

$$\sqrt{b^5}(8x-x^2-16)+\frac{\sqrt{b}}{8x-x^2-16}=-(x-4)^2b^2\sqrt{b}-\frac{\sqrt{b}}{(x-4)^2}=\frac{-\sqrt{b}(b^2(x-4)^4+1)}{(x-4)^2}\le 0$$

$$\frac{-\sqrt{b}(b^2(x-4)^4+1)}{(x-4)^2}\ge-\frac{2}{3}b|\cos\pi x|$$

$$\frac{(b^2(x-4)^4+1)}{\sqrt{b}(x-4)^2}\le\frac{2}{3}|\cos\pi x|$$

Это неравенство будет иметь хотя бы одно решение, если $f(x)_{наим}\le\dfrac{2}{3}$, где

$$f(x)=\frac{(b^2(x-4)^4+1)}{\sqrt{b}(x-4)^2}$$

$$f'(x)=\frac{b^2 4(x-4)^3\sqrt{b}(x-4)^2-2\sqrt{b}(x-4)b^2(x-4)^4-2\sqrt{b}(x-4)}{\sqrt{b}(x-4)^4}=$$

$$=\frac{2\sqrt{b}(x-4)(b^2(x-4)^4-1)}{\sqrt{b}(x-4)^4}=\frac{2(b^2(x-4)^4-1)}{(x-4)^3}=\frac{2(b(x-4)^2+1)(b(x-4)^2-1)}{(x-4)^3}$$

Наименьшее значение

$$f(x)_{наим}=f\left(4\pm\frac{1}{\sqrt{b}}\right)=\frac{b^2\left(\dfrac{1}{\sqrt{b}}\right)^4+1}{\sqrt{b}\left(\dfrac{1}{\sqrt{b}}\right)^2}\le\frac{2}{3}$$

$$\frac{1+1}{\dfrac{\sqrt{b}}{b}}\le\frac{2}{3}\quad\to\quad\sqrt{b}\le\frac{1}{3}\quad\to\quad b\le\frac{1}{9}$$

Наибольшим значением будет $b=\dfrac{1}{9}$

Диагностическая работа №8 С5

Найти все значения параметра *a*, при каждом из которых для любого значения *x* выполняется неравенство:

$$\left|3\sin^2 x + 2a\sin x\cos x + \cos^2 x + a\right| \le 3$$

$$\left|3\frac{1-\cos 2x}{2} + 2a\sin x\cos x + \frac{1+\cos 2x}{2} + a\right| \le 3$$

$$\left|2 - \cos 2x + a\sin 2x + a\right| \le 3$$

$$\left|2 + a + \sqrt{a^2+1}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+1}}\sin 2x - \frac{1}{\sqrt{a^2+1}}\cos 2x\right)\right| \le 3$$

Обозначим $\frac{a}{\sqrt{a^2+1}} = \cos\alpha; \quad \frac{1}{\sqrt{a^2+1}} = \sin\alpha$

Тогда

$$\left|2 + a + \sqrt{a^2+1}\sin(2x-\alpha)\right| \le 3$$

$$-3 \le 2 + a + \sqrt{a^2+1}\sin(2x-\alpha) \le 3$$

$$\frac{-5-a}{\sqrt{a^2+1}} \le \sin(2x-\alpha) \le \frac{1-a}{\sqrt{a^2+1}}$$

Чтобы неравенство выполнялось для любого *x*, необходимо

$$\begin{cases} \frac{1-a}{\sqrt{a^2+1}} \ge 1 \\ \frac{-a-5}{\sqrt{a^2+1}} \le -1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 1 - a - \sqrt{a^2+1} \ge 0 \\ -a - 5 + \sqrt{a^2+1} \le 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \sqrt{a^2+1} \le 1 - a \\ \sqrt{a^2+1} \le a + 5 \end{cases}$$

Правые части неравенств неотрицательны, в противном случае нет решений.

$$\begin{cases} a^2 + 1 \le a^2 - 2a + 1 \\ a^2 + 1 \le a^2 + 10a + 25 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a \le 0 \\ a \ge -2{,}4 \end{cases}$$

Ответ: $a \in [-2{,}4; 0]$

Диагностическая работа №9 C5

Найдите все значения *a*, при каждом из которых все корни уравнения
$3ax^2+\left(3a^3-12a^2-1\right)x-a(a-4)=0$
удовлетворяют неравенству $|x|\le 1$.

Сначала рассмотрим случай $a=0$, корень уравнения $x=0$ - удовлетворяет условию задачи.
Далее

$$|x|\le 1 \quad \to \quad -1\le x\le 1$$

$$3ax^2+3a(a^2-4a)x-x-(a^2-4a)=0$$

$$3ax(x+a^2-4a)-(x+a^2-4a)=0$$

$$(x+a^2-4a)(3ax-1)=0$$

$$x_1=4a-a^2;\quad x_2=\frac{1}{3a};$$

Оба корня должны принадлежать промежутку $|x|\le 1$.

$$\begin{cases}-1\le 4a-a^2\le 1\\ -1\le\dfrac{1}{3a}\le 1\end{cases}\qquad \begin{cases}4a-a^2\le 1\\ 4a-a^2\ge -1\\ \dfrac{1}{3a}\le 1\\ \dfrac{1}{3a}\ge -1\end{cases}\qquad \begin{cases}a^2-4a+1\ge 0\\ a^2-4a-1\le 0\\ \dfrac{1-3a}{3a}\le 0\\ \dfrac{1+3a}{3a}\ge 0\end{cases}$$

$$\begin{cases}a\in(-\infty;2-\sqrt{3}]\cup[2+\sqrt{3};\infty)\\ a\in[2-\sqrt{5};2+\sqrt{5}]\\ a\in(-\infty;0)\cup[1/3;\infty)\\ a\in(-\infty;-1/3]\cup(0;\infty)\end{cases}\qquad\to\quad a\in[2+\sqrt{3};2+\sqrt{5}]$$

Ответ: $[2+\sqrt{3};2+\sqrt{5}],\quad \{0\}$.