C1 Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y+\sin x=0, \\ (3\sqrt{\sin x}-1)(5y-3)=0. \end{cases}$$

Решение.

Из второго уравнения получаем: $\begin{cases} y=\frac{3}{5}, \\ \sin x\geq 0 \end{cases}$ или $\sin x=\frac{1}{9}$.

Если $y=\frac{3}{5}$, то из первого уравнения $\sin x=-\frac{3}{5}$. Это противоречит условию $\sin x\geq 0$.

Если $\sin x=\frac{1}{9}$, то $x=(-1)^n\arcsin\frac{1}{9}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$, и из первого уравнения получаем: $y=-\frac{1}{9}$.

Ответ: $\left((-1)^n\arcsin\frac{1}{9}+\pi n;\ -\frac{1}{9}\right),\ n\in\mathbb{Z}$.

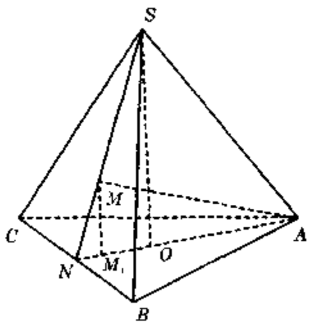
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	2
Получен ответ, но решение неверно только из-за того, что не учтены ограничения на знак или величину выражения $\cos x$ ($\sin x$)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

C2 В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с основанием ABC известны ребра: $AB=12\sqrt{3}$, $SC=13$. Найдите угол, образованный плоскостью основания и прямой AM, где M – точка пересечения медиан грани SBC.

Решение.

Пусть N – середина BC. Прямая NS проектируется на плоскость основания в прямую AN. Поэтому проекция точки M – точка M_1 – лежит на отрезке AN. Значит, прямая AN является проекцией прямой AM, следовательно, угол MAM_1 – искомый.

$MM_1\parallel SO$, где O – центр основания, значит, треугольники SNO и MNM_1 подобны с коэффициентом 3.



Тогда $AM_1=AN-NM_1=AN-\frac{1}{9}AN=\frac{8}{9}AN=16$.

Кроме того, $MM_1=\frac{1}{3}SO=\frac{1}{3}\sqrt{SC^2-CO^2}=\frac{5}{3}$.

Из прямоугольного треугольника MM_1A находим:

$\operatorname{tg}\angle MAM_1=\frac{MM_1}{AM_1}=\frac{5}{48}$.

Значит, искомый угол равен $\operatorname{arctg}\frac{5}{48}$.

Ответ: $\operatorname{arctg}\frac{5}{48}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	2
Способ нахождения искомого угла верен, но получен неверный ответ или решение не закончено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

C3 Решите неравенство

$$\log_5((7^{-x^2}-6)(7^{-x^2+16}-1))+\log_5\frac{7^{-x^2}-6}{7^{-x^2+16}-1}>\log_5(7^{2-x^2}-5)^2.$$

Решение.

Пусть $t=7^{-x^2}$, $0<t\leq 1$, тогда неравенство принимает вид:

$$\log_5((t-6)(7^{16}t-1))+\log_5\frac{t-6}{7^{16}t-1}>\log_5(49t-5)^2.$$

$t-6<0$, поэтому $7^{16}t-1<0$, то есть $0<t<\frac{1}{7^{16}}$.

Получаем: $\begin{cases} \log_5(t-6)^2>\log_5(49t-5)^2, \\ 0<t<\frac{1}{7^{16}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |t-6|>|49t-5|, \\ 0<t<\frac{1}{7^{16}} \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 6-t>5-49t, \\ 0<t<\frac{1}{7^{16}} \end{cases} \Leftrightarrow 0<t<\frac{1}{7^{16}}$.

Тогда $7^{-x^2}<7^{-16} \Leftrightarrow x^2>16 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>4 \\ x<-4. \end{array}\right.$

Ответ: $(-\infty;\ -4)\cup(4;\ +\infty)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	3
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного только конечным числом точек	2
Полученный ответ неверен, но решение содержит переход от исходного неравенства к верным рациональным неравенствам	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

C4 В треугольнике ABC $AB=9$, $BC=4$, $CA=6$. Точка D лежит на прямой BC так, что $BD:DC=3:4$. Окружности, вписанные в каждый из треугольников ADC и ADB, касаются стороны AD в точках E и F. Найдите длину отрезка EF.

Решение.

Пусть $AD=d$, $BD=x$, $DC=y$. Возможны два случая:

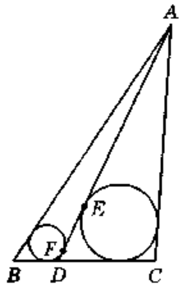


Рис. 1

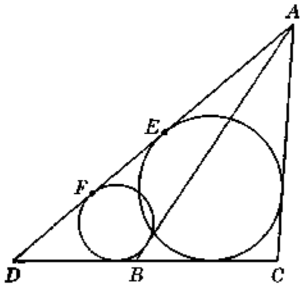


Рис. 2

1. Точка D лежит на отрезке BC (рис. 1). Тогда $x=\frac{12}{7}$, $y=\frac{16}{7}$, $DE=\frac{d+y-6}{2}$, $DF=\frac{d+x-9}{2}$. Значит, $EF=\frac{3+y-x}{2}=\frac{25}{14}$.

2. Точка D лежит вне отрезка BC (рис. 2). Тогда $x=12$, $y=x+4=16$, $DE=\frac{d+y-6}{2}$, $DF=\frac{d+x-9}{2}$. Значит, $EF=\frac{7}{2}$.

Ответ: $\frac{7}{2}$ или $\frac{25}{14}$.

Содержание критерия	Баллы
Рассмотрены все возможные геометрические конфигурации и получен правильный ответ	3
Рассмотрена хотя бы одна возможная конфигурация, для которой получено правильное значение искомой величины	2
Рассмотрена хотя бы одна возможная геометрическая конфигурация, для которой получено значение искомой величины, неправильное из-за арифметической ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

C5 Найдите все значения a, при каждом из которых функция $f(x)=x^2-|x-a^2|-9x$ имеет более двух точек экстремума.

Решение.

1. Функция f имеет вид:

а) при $x\ge a^2$: $f(x)=x^2-10x+a^2$, поэтому ее график есть часть параболы с ветвями, направленными вверх, и осью симметрии $x=5$;

б) при $x\le a^2$; $f(x)=x^2-8x-a^2$, поэтому ее график есть часть параболы с ветвями, направленными вверх, и осью симметрии $x=4$.

Все возможные виды графика функции $f(x)$ показаны на рисунках:

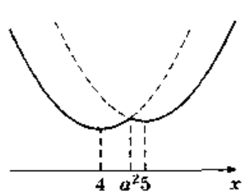


Рис. 1

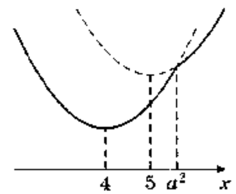


Рис. 2

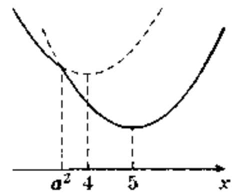


Рис. 3

2. Графики обеих квадратичных функций проходят через точку $(a^2; f(a^2))$.

3. Функция $y=f(x)$ имеет более двух точек экстремума, а именно – три, в единственном случае (рис. 1): $4<a^2<5 \iff 2<|a|<\sqrt{5}$.

Ответ: $-\sqrt{5}<a<-2$; $2<a<\sqrt{5}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
Получен верный ответ. Решение в целом верное, но либо имеет пробелы (например, не описаны необходимые свойства функции), либо содержит вычислительные ошибки	3
Верно рассмотрены все случаи раскрытия модулей. При составлении или решений условий на параметр допущены ошибки, в результате которых в ответе либо приобретены посторонние значения, либо часть верных значений потеряна	2
Хотя бы в одном из случаев раскрытия модуля составлено верное условие на параметр либо построен верный эскиз графика функции в целом	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

C6 Перед каждым из чисел 11, 12, …, 19 и 6, 7, …, 10 произвольным образом ставят знак плюс или минус, после чего от каждого из образовавшихся чисел первого набора отнимают каждое из образовавшихся чисел второго набора, а затем все 45 полученных результатов складывают. Какую наименьшую по модулю и какую наибольшую сумму можно получить в итоге?

Решение.

1. Если все числа первого набора взяты с плюсами, а второго – с минусами, то сумма максимальна и равна

$$5(11+\ldots+19)-9(-6-\ldots-10)=5\left(\frac{11+19}{2}\cdot 9\right)+9\left(\frac{6+10}{2}\cdot 5\right)=45\cdot 23=1035.$$

2. Так как предыдущая сумма оказалась нечетной, то число нечетных слагаемых в ней — нечетно, причем это свойство всей суммы не меняется при смене знака любого ее слагаемого. Поэтому любая из получающихся сумм будет нечетной, а значит, не будет равна 0.

3. Значение 1 сумма принимает, например, при следующей расстановке знаков у чисел:

$$5(-11-12+13-14+15-16+17-18+19)-9(-6-7+8-9+10)=$$
$$=-5\cdot 7+9\cdot 4=-35+36=1.$$

Ответ: 1 и 1035.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен правильный ответ	4
Ответ правилен, но недостаточно обоснован (например, не доказано, что либо сумма отлична от 0, либо что она может быть равна 1)	3
Верно найдено наибольшее значение суммы и доказано, что она всегда отлична от 0	2
Верно найдено только наибольшее значение суммы или только доказано, что она всегда отлична от 0	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0