УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

§ 1. Основные дифференциальные уравнения математической физики.

Многие задачи механики и физики приводят к исследованию дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка. Так, например, при изучении различных видов волн - упругих, звуковых, электромагнитных, а также других колебательных явлений мы приходим к волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right), \qquad (1)$$

где c - скорость распространения волны в данной среде.

Процессы распространения тепла в однородном изотропном теле, так же как и явления диффузии, описываются уравнением теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right), \qquad (2)$$

При рассмотрении установившегося теплового состояния в однородном изотропном теле мы приходим к уравнению Пуассона

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -\mathrm{f}(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}) \qquad (3)$$

При отсутствии источников тепла внутри тела уравнение (3) переходит в уравнение Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \qquad (4)$$

Уравнения (1) - (4) часто называют основными уравнениями математической физики. Их подробное изучение дает возможность построить теорию широкого круга физических явлений и решить ряд физических и технических задач.

Каждое из уравнений (1) - (4) имеет бесчисленное множество частных решений. При решении конкретной физической задачи, необходимо из всех этих решений выбрать то, которое удовлетворяет некоторым дополнительным условиям, вытекающим из её физического смысла. Такими дополнительными условиями чаще всего являются так называемые граничные условия, т.е. условия, заданные на границе рассматриваемой среды, и начальные условия, относящиеся к одному какому-нибудь моменту времени, с которого начинается изучение данного физического явления. Совокупность начальных и граничных условий называется краевыми условиями.

§ 2. Уравнение малых поперечных колебаний струны.

Струной мы будем называть упругую нить, не сопротивляющуюся изгибу, но оказывающую сопротивление растяжению. Отсутствие сопротивления изгибу математически выражается в том, что напряжения возникающие в струне, всегда направлены по касательной к её профилю (рис. 1)

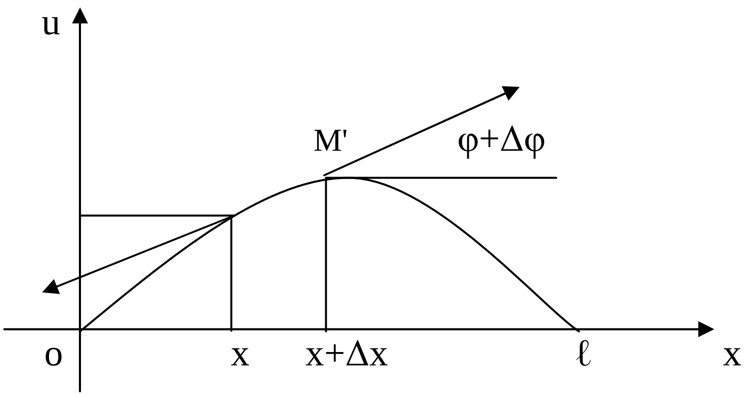

Рис. 1

Будем предполагать, что движение точек струны происходит перпендикулярно оси $0x$ и в одной плоскости. В данном случае процесс колебания описывается функцией $u(x, t)$, которая дает величину перемещения точки струны с абсциссой x в момент времени t. Так как мы рассматриваем малые отклонения струны, то будем предполагать, что длина элемента струны MM' равняется её проекции на ось OX $MM' = \Delta x$. Так же будем считать, что натяжение T во всех точках струны одинаковое.

Рассмотрим элементы струны *MM'* (рис. 1). На концах этого элемента по касательным к струне действуют силы *T*. Пусть касательные образуют с осью *0x* углы φ и $\varphi+\Delta\varphi$. Тогда проекция на ось *ou* сил, действующих на элемент *MM'*, будет равна $T\sin(\varphi + \Delta\varphi) - T\sin\varphi$. Так как угол φ мал, то можно положить $tg\varphi \approx \sin\varphi$, и будем иметь

$$T\sin(\varphi+\Delta\varphi)-T\sin\varphi \approx Ttg(\varphi+\Delta\varphi)-Ttg\varphi = T\left[\frac{\partial u(x+\Delta x,t)}{\partial x}-\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right] = T\int_x^{x+\Delta x}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx$$

Обозначим через *p(x,t)* внешнюю силу, действующую на струну параллельно оси *ou* и рассчитанную на единицу длины. Тогда проекция на ось *0u* этой силы, действующей на участок *MM'* струны, будет равна

$$\int_x^{x+\Delta x} P(x,t)dx$$

Что касается силы сопротивления среды, то здесь надо принимать во внимание, как среду, так и величину скорости колебания струны. Если струна колеблется в воздухе и величина скорости колебания не очень велика, то можно считать силу сопротивления среды пропорциональной первой степени скорости. Это приводит к следующему выражению для проекции на ось *0u* силы сопротивления, действующей на участок *MM'*:

$$-\int_x^{x+\Delta x} 2k\frac{\partial u}{\partial t}dx \quad ,$$

где k - постоянная положительная величина.

Обозначим через $\rho(x)$ линейную плотность струны; тогда на участок *MM'* будет действовать сила инерции равная:

$$-\int_x^{x+\Delta x}\rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}dx \ ,$$

Сумма всех сил должна быть равна нулю, т.е.

$$\int_x^{x+\Delta x}\left[T\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+P(xt)-2k\frac{\partial u}{\partial t}-\rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right]dx = 0$$

Отсюда в силу произвольности x следует, что подынтегральная функция должна равняться нулю в каждой точке струны в любой момент времени t:

$$\rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2k\,\frac{\partial u}{\partial t} = T\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + P(x,t)$$

Это и есть искомое уравнение колебаний струны.

Если $\rho = const$, т.е. в случае однородной струны это уравнение записывается в виде:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2h\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + q(x,t), \tag{1}$$

где $a = \sqrt{\frac{\mathrm{T}}{\rho}}, \quad h = \frac{k}{\rho}, \quad q(x,t) = \frac{1}{\rho}P(x,t).$

Нетрудно видеть, что если пренебречь сопротивлением, то в случае отсутствия внешней силы уравнение (1) перейдет в уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{1'}$$

которое называется уравнением свободных колебаний струны.

Запишем краевые условия, с учетом которых следует интегрировать уравнение (1).

Пусть, например, концы струны при $x=0$ и $x=\ell$ неподвижны. Тогда при любом t должны выполняться равенства:

u(o,t)=0, (2)

u(ℓ,t)=0 (3)

Эти равенства являются граничными условиями нашей задачи.

В начальный момент $t=0$ струна имеет форму, которую мы ей придали. Пусть эта форма описывается функцией $f(x)$

$$u(x,o)=u|_{t=o}=f(x). \qquad (4)$$

В начальный момент должна быть задана скорость в каждой точке струны, которая определяется функцией *F(x)*

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=o}=F(x). \qquad (5)$$

Условия (4) и (5) являются начальными условиями.

§ 3. Формула Даламбера.

Рассмотрим задачу с начальными условиями для неограниченной струны (задача Коши для волнового уравнения).

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad (1)$$

$$\left.\begin{aligned} &u|_{t=o}=f(x), \\ &\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=o}=F(x) \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Для того, чтобы найти общее решение уравнения (1) произведем следующую замену переменных:

$$\xi = x - at, \qquad \eta = x + at \qquad (3)$$

Вторые производные, входящие в уравнение (1), выражаются через производные по переменным ξ и η посредством равенств:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2a^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + a^2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$$

Внося эти выражения в уравнение (1) и произведя очевидные преобразования, получим:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=0 \tag{4}$$

Перепишем уравнение (4) в виде

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)=0,$$

тогда $\quad \dfrac{\partial u}{\partial\eta}=\theta(\eta),$

где $\theta(\eta)$ - произвольная функция η. Интегрируя полученное уравнение по η, рассматривая ξ как параметр, найдем, что

$$u=\int\theta(\eta)d\eta+\varphi(\xi),$$

где $\varphi(\xi)$ - произвольная функция переменной ξ. Полагая теперь

$$\int\theta(\eta)d\eta=\psi(\eta)$$

получим $\quad u = \varphi(\xi) + \psi(\eta),$

или, возвращаясь к старым переменным x и t, запишем общее решение волнового уравнения (1)

$$u = \varphi (x - at) + \psi (x + at) \tag{5}$$

Определим в общем решении (5) функции φ и ψ таким образом, чтобы удовлетворялись начальные условия (2):

$$\varphi(x)+\psi(x)= f(x),$$

$$-\varphi'(x)+\psi'(x)=\frac{1}{a}F(x) \tag{6}$$

Интегрируя второе равенство, получим

$$\frac{1}{a}\int_o^x F(x)dx=-\varphi(x)+\psi(x)+C, \tag{7}$$

где C - произвольная постоянная.

Из равенств (6), (7) определяем функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$:

$$\varphi(x)=\frac{1}{2}f(x)-\frac{1}{2a}\int_{o}^{x}F(z)dz+\frac{c}{2},$$

$$\psi(x)=\frac{1}{2}f(x)+\frac{1}{2a}\int_{o}^{x}F(z)dz-\frac{c}{2}$$

Подставив полученные выражения в формулу (5), запишем общее решение (формула Даламбера):

$$u(x,t)=\frac{f(x-at)+f(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}F(z)dz. \qquad (8)$$

Выясним физический смысл формулы Даламбера. Согласно равенству смещение точек струны $u(x,t)$ складывается из двух слагаемых:

$$u_1=\varphi(x-at) \qquad (9)$$

и $$u_2=\psi(x+at) \qquad (10)$$

Рассмотрим сначала частный случай, когда $\psi=0$, т.е. когда смещение струны определяется формулой (9). Предположим, что независимые переменные изменяются так, что разность $x\text{-}at$ остается постоянной, т.е. что

$$x - at = C$$

В таком случае $dx - adt = 0$ или

$$\frac{dx}{dt}=a$$

Отсюда следует, что если точка x движется с постоянной скоростью a в положительном направлении, то смещение u_1 струны в этой точке во всё время движения будет равно $\varphi(c)$, оставаясь, таким образом, постоянным (рис.2). Это движение смещения φ(с) по струне называется прямой бегущей волной. Она характеризуется частным решением $u_1 = \varphi(x - at)$ волнового уравнения (1).

Аналогично частному решению $u_1 = \psi(x + at)$ будет соответствовать движение смещения $\psi(c)$, но совершающееся в обратном направлении (рис.3).

Здесь мы имеем дело с обратной бегущей волной. Постоянное число a является скоростью распространения волн по струне.

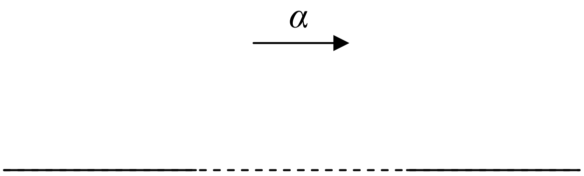

Рис. 2

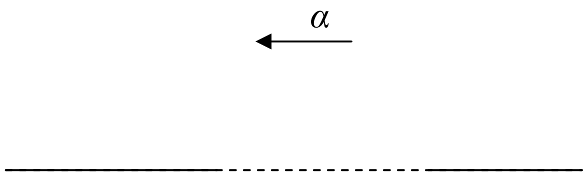

Рис. 3

В общем случае, выражаемом формулой (5) действительное смещение струны получается путем суперпозиции (наложения) прямой и обратной бегущих волн в каждый данный момент времени t.

§ 4. Метод Фурье для уравнения свободных колебаний струны.

Метод Фурье или метод разделения переменных является одним из наиболее распространенных методов решения уравнений с частными производными. С помощью этого метода рассмотрим решение задачи о колебаниях струны, закрепленной на концах. Эта задача сводится к решению уравнения:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad (1)$$

при граничных условиях

$$u\big|_{x=o} = u\big|_{x=\ell} = 0 \qquad (2)$$

и начальных условиях

$$u\big|_{t=o} = f(x), \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=o} = F(x) \qquad (o \le x \le \ell). \qquad (3)$$

Будем искать частные решения уравнения (1), не равные тождественно нулю, в виде произведения

$$u(x,t) = X(x)T(t), \qquad (4)$$

удовлетворяющие граничным условиям (2).

Подставляя (4) в уравнение (1), получим

$$T''(t)X(x)=a^2T(t)X''(x)$$

или $$\frac{T''(t)}{a^2T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)} \tag{5}$$

Последнее равенство, левая часть которого зависит только от t, а правая - только от x, возможно лишь в том случае, если обе части его не зависят ни от x, ни от t, т.е. представляют собой одну и ту же постоянную. Обозначим эту постоянную через $-\lambda$. Тогда из равенства (5) получим два обыкновенных дифференцированных уравнения:

$$T''(t)+a^2\lambda T(t)=0, \tag{6}$$

$$X''(x)+\lambda X(x)=0 \tag{7}$$

Чтобы получить нетривиальные, т.е. не равные тождественно нулю, решения вида (4), удовлетворяющие граничным условиям (2), необходимо найти нетривиальные решения уравнения (7), удовлетворяющие граничным условиям

$$X(o)=0, \qquad X(\ell)=0 \tag{8}$$

Таким образом, приходим к следующей задаче: найти такие значения параметра λ, при которых существуют нетривиальные решения уравнения (7), удовлетворяющие граничным условиям (8). Эту задачу называют задачей Штурма-Лиувилля.

Те значения параметра λ, при которых задача (7) - (8) имеет нетривиальные решения, называются собственными значениями, а сами эти решения - собственными функциями.

Найдем теперь собственные значения и собственные функции задачи (7) - (8). Рассмотрим отдельно три случая, когда $\lambda < 0$, $\lambda = 0$ и $\lambda > 0$.

1. При $\lambda < 0$ общее решение уравнения (7) имеет вид:

$$X(x)=C_1e^{\sqrt{-\lambda}\cdot x}+C_2e^{-\sqrt{-\lambda}\cdot x}$$

Используя граничные условия (8), получим

$$c_1 + c_2 = 0 \qquad c_1 e^{\sqrt{-\lambda}\,\ell} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}\,\ell} = 0 \qquad (9)$$

Так как определитель системы (9) отличен от нуля, то $c_1 = c_2 = 0$. Следовательно, $X(x) \equiv 0$

2. При $\lambda = 0$ общее решение уравнения (7) имеет вид:

$$X(x) = c_1 + c_2 x$$

Граничные условия (8) дают

$$c_1 + c_2 o = 0, \qquad c_1 + c_2 \ell = 0$$

Отсюда $c_1 = c_2 = 0$ и, следовательно, $X(x) \equiv 0$.

3. При $\lambda > 0$ общее решение уравнения (7) имеет вид:

$$X(x) = c_1 \cos \sqrt{\lambda}\, x + c_2 \sin \sqrt{\lambda}\, x$$

Используя граничные условия получим

$$c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot o = 0, \qquad c_1 \cos \sqrt{\lambda}\,\ell + c_2 \sin \sqrt{\lambda}\,\ell = 0$$

Из первого уравнения следует $c_1 = 0$, а из второго $c_2 \sin\sqrt{\lambda}\,\ell = 0$; мы должны считать $c_2 \neq 0$, так как в противном случае $X(x) \equiv 0$. Поэтому,

$$\sin\sqrt{\lambda}\cdot\ell = 0, \qquad т.е. \quad \sqrt{\lambda} = \frac{k\pi}{\ell},$$

где k - любое целое число.

Следовательно, нетривиальные решения задачи (7) - (8) возможны лишь при значениях

$$\lambda_k = \left(\frac{k\pi}{\ell}\right)^2 \qquad (k = 1,2,3,\ldots).$$

Этим собственным значениям соответствуют собственные функции

$$X_k(x) = \sin\frac{k\pi x}{\ell}.$$

При $\lambda = \lambda_k$ общее решение уравнения (6) имеет вид

$$T_k(t) = a_k \cos\frac{k\pi a t}{\ell} + b_k \sin\frac{k\pi a t}{\ell},$$

где a_k и b_k - произвольные постоянные.

Таким образом, функции

$$u_k(x,t)=X_k(x)T_k(t)=\left(a_k\cos\frac{k\pi at}{\ell}+b_k\sin\frac{k\pi at}{\ell}\right)\sin\frac{k\pi x}{\ell}$$

удовлетворяют уравнению (1) и граничным условиям (2) при любых a_k и b_k.

В силу линейности и однородности уравнения (1) всякая конечная сумма решений будет также решением. То же справедливо и для ряда:

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{k\pi at}{\ell}+b_k\sin\frac{k\pi at}{\ell}\right)\sin\frac{k\pi x}{\ell}, \qquad (10)$$

если он сходится и его можно дважды почленно дифференцировать по x и t. Определим коэффициенты ряда a_k и b_k так чтобы удовлетворялись начальные условия (3).

Продифференцируем ряд (10) по t:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k\pi a}{\ell}\left(-a_k\sin\frac{k\pi at}{\ell}+b_k\cos\frac{k\pi at}{\ell}\right)\sin\frac{k\pi x}{\ell} \qquad (11)$$

Полагая в (10) и (11) $t=0$, получим, в силу начальных условий (3),

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}a_k\sin\frac{k\pi x}{\ell}, \qquad F(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k\pi a}{\ell}b_k\sin\frac{k\pi x}{\ell}. \qquad (12)$$

Формулы (12) представляют собой разложение заданных функций $f(x)$ и $F(x)$ в ряд Фурье по синусам в интервале (o,ℓ).

Коэффициенты этих разложений вычисляются по известным формулам:

$$a_k=\frac{2}{\ell}\int_o^{\ell}f(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}dx, \qquad b_k=\frac{2}{k\pi a}\int_o^{\infty}F(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}dx \qquad (13)$$

Таким образом решение задачи (1) - (3) дается рядом (10), коэффициенты которого a_k и b_k определяются по формулам (13).

Решение (10) можно записать в следующем виде:

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}A_k\sin\frac{k\pi x}{\ell}\sin\left(\frac{k\pi at}{\ell}+\varphi_k\right), \qquad (14)$$

где $a_k = A_k \sin\varphi_k$, $\qquad b_k = A_k \cos\varphi_k$

Каждый член ряда (14) представляет собой так называемую стоячую волну, при которой точки струны совершают гармоническое колебательное движение с одинаковой фазой φ_k,

с амплитудой $A_k \sin\frac{k\pi x}{\ell}$ *и* частотой $\omega_{л} = \frac{k\pi a}{\ell}$.

При таком колебании струна издает звук, высота которого зависит от частоты ω_k; частота основного (самого низкого) тона выражается формулой

$$\omega_1 = \frac{\pi a}{\ell}.$$

Остальные тона, соответствующие частотам, кратным ω_1, называются гармониками. Решение (14) складывается из отдельных гармоник; амплитуда их, а потому и влияние их на интенсивность звука обыкновенно быстро убывает при увеличении номера гармоники, и всё их действие сводится к созданию тембра звука, издаваемого струной.

§5. Вынужденные колебания струны, закрепленной на концах.

Рассмотрим вынужденные колебания однородной струны, закрепленной на концах, под действием внешней силы p(x,t), рассчитанной на единицу длины. Эта задача сводится к решению уравнения:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + q(x,t) \tag{1}$$

при граничных условиях

$$u\big|_{x=0} = u\big|_{x=\ell} = 0 \tag{2}$$

и начальных условиях

$$u\big|_{t=o} = f(x), \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=o} = F(x). \tag{3}$$

Будем искать решение этой задачи в виде суммы:

$$\mathrm{u} = \upsilon + \omega,$$

где υ - есть решение неоднородного уравнения

$$\frac{\partial^2 \upsilon}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 \upsilon}{\partial x^2} + q(x,t), \tag{4}$$

удовлетворяющее граничным условиям

$$\upsilon\big|_{x=o} = 0, \qquad \upsilon\big|_{x=\ell} = 0 \tag{5}$$

$$\upsilon\big|_{t=o} = 0, \qquad \frac{\partial \upsilon}{\partial t}\bigg|_{t=o} = 0, \tag{6}$$

и начальным условиям

а ω - есть решение однородного уравнения:

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial e^2} = a^2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2},$$

удовлетворяющее граничным условиям:

$$\omega\big|_{x=o} = 0, \qquad \omega\big|_{x=\ell} = 0$$

и начальным условиям:

$$\omega\big|_{t=o} = f(x), \qquad \frac{\partial \omega}{\partial t}\bigg|_{t=o} = F(x).$$

Решение υ представляет вынужденные колебания струны, то есть такие колебания, которые совершаются под действием внешней возмущающей силы, когда начальные возмущения отсутствуют.

Решение ω представляет свободные колебания струны, то есть такие колебания, которые происходят только вследствие начального возмущения.

Методы нахождения свободных колебаний были рассмотрены выше, так что здесь остановимся на нахождении вынужденных колебаний υ. Как и в случае свободных колебаний, будем искать решение в виде ряда:

$$\upsilon(\mathrm{x},\mathrm{t}) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) \sin\frac{k\pi x}{\ell}, \tag{7}$$

так что граничные условия (5) удовлетворяются сами собою.

Определим теперь функции $T_k(t)$ так, чтобы ряд (7) удовлетворял уравнению (4) и начальным условиям (6).

Подставляя ряд (7) в уравнение (4) получим:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[T_k''(t)+\omega_k^2 T_k(t)\right]\sin\frac{k\pi x}{\ell}=q(x,t), \qquad (8)$$

где положено

$$\omega_{\text{k}}=\frac{k\pi}{\ell}.$$

Разложим функцию $q(x,t)$ в интервале (o,ℓ) в ряд Фурье по синусам:

$$q(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}q_k(t)\sin\frac{k\pi x}{\ell}, \qquad (9)$$

где $$q_k(t)=\frac{2}{\ell}\int_o^{\ell}q(\xi,t)\sin\frac{k\pi\xi}{\ell}d\xi\ . \qquad (10)$$

Сравнивая разложения (8) и (9) для одной и той же функции $q(x,t)$, получим дифференциальные уравнения:

$$T_k''(t)+\omega_k^2 T_k(t)=q_k(t) \qquad (k=1,2,3,\dots) \qquad (11)$$

определяющие функции $T_k(t)$.

Чтобы решение υ, определяемое рядом (7), удовлетворяло и начальным условиям (6), достаточно подчинить функции $T_k(t)$ условиям:

$T_k(o)=0, \qquad T'_k(o)=0 \qquad (k=1,2,3,\dots)$ (12)

Решение задачи (11), (12) нетрудно получить с помощью преобразования Лапласа.

Если

$$\overline{T}_k(p)=\int_o^{\infty}\overline{e}^{pt}T_k(t)dt$$

и $$\overline{q}_k(p)=\int_o^{\infty}\overline{e}^{pt}q_k(t)dt\ ,$$

то для определения изображения $\overline{T}_k(p)$ имеем соотношение

$$p^2\overline{T}_k(p)+\omega_k^2\overline{T}_k(p)=\overline{q}_k(p),$$

откуда $\overline{T}_k(p)=\dfrac{\overline{q}_k(p)}{p^2+\omega_k^2}$,

Применяя теорему о свёртке, находим оригинал

$$T_k(t)=\frac{1}{\omega_k}\int_o^t q_k(\tau)\sin\omega_k(t-\tau)d\tau$$

Подставим вместо $q_k(\tau)$ его выражение (10):

$$T_k(t)=\frac{2}{\ell\omega_k}\int_o^t d\tau\int_o^\ell q(\xi,\tau)\sin\omega_k(t-\tau)\sin\frac{k\pi\xi}{\ell}d\xi \tag{13}$$

Таким образом решение задачи (1) - (3) выражается в виде ряда:

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\left[T_k(t)+a_k\cos\frac{k\pi at}{\ell}+b_k\sin\frac{k\pi at}{\ell}\right]\sin\frac{k\pi x}{\ell}, \tag{14}$$

где коэффициенты $T_k(t)$ определяются по формулам (13), а

$$a_k=\frac{2}{\ell}\int_o^\ell f(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}dx,\qquad \mathrm{b_k}=\frac{2}{k\pi a}\int_o^\ell F(x)\sin\frac{k\pi x}{\ell}dx.$$

§6. Уравнение теплопроводности.

Рассмотрим твердое тело, температура которого в точке (x, y, z) в момент времени t определяется функцией $u(x, y, z, t)$. Если различные части тела находятся при различной температуре, то в теле будет происходить движение тепла от более нагретых частей к менее нагретым. Возьмем какую-нибудь поверхность S внутри тела и на ней малый элемент ΔS около точки $M(x, y, z)$. В теории теплопроводности принимается, что количество тепла ΔQ, проходящего через элемент ΔS за время Δt, пропорционально $\Delta t\,\Delta S$ и нормальной производной температуры

$\frac{\partial u}{\partial n}$, т е.

$$\Delta Q = -\lambda \Delta t \cdot \Delta S \frac{\partial u}{\partial n}, \qquad (1)$$

где λ - коэффициент теплопроводности, а

n - нормаль к элементу поверхности ΔS в направлении уменьшения температуры.

Обозначим через q величину теплового потока, то есть количество тепла, проходящего через единицу площади поверхности за единицу времени. Тогда (1) можно записать в виде:

$$q = -\lambda \frac{\partial u}{\partial n}$$

Для вывода уравнения теплопроводности выделим внутри тела произвольный объём *V*, ограниченный поверхностью *S*, и рассмотрим изменение количества тепла в этом объёме за промежуток времени (t_1, t_2). Нетрудно видеть, что через поверхность *S* за промежуток времени (t_1, t_2), согласно формуле (1), входит количество тепла, равное

$$Q_1 = -\int_{t_1}^{t_2} dt \iint_S \lambda \frac{\partial u}{dn} dS ,$$

где n - внутренняя нормаль к поверхности *S*.

Рассмотрим элемент объёма ΔV. На изменение температуры этого объёма на ΔU за промежуток времени Δt нужно затратить количество тепла

$$\Delta Q_2 = \left[u\left(x, y, z, t_2\right) - u\left(x, y, z, t_1\right)\right] c\rho\Delta V = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial u}{\partial t} dt \cdot c\rho\Delta V ,$$

где ρ - плотность вещества,

c - теплоемкость вещества.

Таким образом, количество тепла, необходимое для изменения температуры объёма V на ΔU равно:

$$Q_2 = \int_{t_1}^{t_2} dt \iiint_V c\rho \frac{\partial u}{dt} dV .$$

Предположим, что внутри рассматриваемого объёма имеются источники тепла. Обозначим через $F(x,y,z,t)$ плотность источников тепла (количество выделяемого тепла в единицу времени в единице объёма). Тогда количество тепла, выделяемого в объёме V за промежуток времени (t_1, t_2), будет равно:

$$Q_3 = \int_{t_1}^{t_2} dt \iiint_V F(x, y, z, t) dV .$$

Составим теперь уравнение теплового баланса для выделенного объёма V. Очевидно, что $Q_2 = Q_1 + Q_3$, то есть

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \iiint_V c\rho \frac{\partial u}{\partial t} dV = -\int_{t_1}^{t_2} dt \iint_S \lambda \frac{\partial u}{\partial n} dS + \int_{t_1}^{t_2} dt \iiint_V F(x,y,z,t) dV$$

Так как V и промежуток времени (t_1, t_2) произвольны, то для любой точки рассматриваемого тела и для любого момента времени t должно выполняться равенство:

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t} = div(\lambda grad u) + F(x, y, z, t). \qquad (2)$$

Если тело однородно, то c,ρ и λ постоянны и уравнение (2) можно переписать в виде:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + f(x, y, z, t), \qquad (3)$$

где $a^2 = \dfrac{\lambda}{c\rho}$ - коэффициент температуропроводности,

а $f(x, y, z, t) = \dfrac{1}{c\rho} F(x, y, z, t).$

В частном случае, когда температура зависит только от координат x, y, t, что, например, имеет место при распространении тепла в очень тонкой однородной пластинке, уравнение (3) переходит в следующее:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \pm f(x, y, t).$$

Наконец, для тела линейного размера, например, для однородного стержня, уравнение теплопроводности принимает такой вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t).$$

Граничное условие для уравнения (3) может быть задано различными способами:

1. в каждой точке поверхности S задается температура

$$u\big|_S = \psi_1(P, t), \tag{4а}$$

где $\psi_1(P,t)$ - известная функция точки P поверхности S и времени $t \geq 0$.

2. на поверхности S задан тепловой поток

$$q = -\lambda \frac{\partial u}{\partial n},$$

откуда

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S = \psi_2(P, t), \tag{4б}$$

где $\psi_2(P,t)$ - известная функция.

3. на поверхности тела происходит теплообмен с окружающей средой, температура которой u_o известна. По закону Ньютона количество тепла, передаваемое в единицу времени с единицы площади поверхности тела в окружающую среду, пропорционально разности температур поверхности тела и окружающей среды:

$$q = \alpha (u - u_o),$$

где α - коэффициент теплообмена. Это количество тепла должно быть равно тому количеству тепла, которое передается через единицу площади поверхности за единицу времени посредством теплопроводности.

$$\alpha\left(u - u_o\right) = -\lambda \frac{\partial u}{\partial n},$$

где n - внешняя нормаль к поверхности S; или,

положив $h = \alpha|\lambda$

$$\frac{\partial u}{\partial n} + h\left(u - u_o\right)\Big|_S = 0 \qquad (4в)$$

Таким образом, задача о распространении тепла в однородном твердом теле ставится так: найти решение уравнения (3), удовлетворяющее начальному условию

$$u|_{t=o} = \varphi\ (x, y, z)$$

и одному из граничных условий (4).

§7. Уравнение диффузии.

Основным законом диффузии в неподвижной среде является закон Фика, согласно которому диффузионный поток пропорционален градиенту концентрации

$$q = -D\frac{\partial C}{\partial n}, \qquad (1)$$

где C - концентрация диффундирующего вещества,

а q - диффузионный поток, то есть количество вещества, переносимое через единицу площади поверхности за единицу времени. D - называется коэффициентом диффузии.

Диффузия в неподвижной среде может наблюдаться только в твердых телах, так как в жидкостях и газах на эти процессы накладывается движение газа или жидкости - свободная или вынужденная конвекция.

Из формулы (1) видно, что закон диффузии Фика аналогичен закону Фурье в теории теплопроводности. Проведя те же рассуждения, что и при выводе уравнения теплопроводности, получим следующее уравнение диффузии в неподвижной среде:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = di\upsilon\left(DqradC\right) + F\left(x, y, z, t\right), \qquad (2)$$

где F - плотность источников вещества, то есть количества вещества, образующееся вследствие химических реакций в единице объёма за единицу времени.

Если коэффициент диффузии D постоянен и $F = 0$, то уравнение (2) принимает вид:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D\left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial z^2}\right).$$

§8. Распределение температуры в неограниченном стержне.

Начнем изучение этой задачи с вычисления несобственного интеграла

$$\Im = \int_o^\infty e^{-\alpha^2\lambda^2} \cos \beta\lambda d\lambda .$$

Рассмотрим сначала частный случай, когда $\beta = 0$:

$$\Im_o = \int_o^\infty e^{-\alpha^2\lambda^2} d\lambda$$

Возводя в квадрат, запишем:

$$\Im_o = \int_o^\infty e^{-\alpha^2\lambda^2} d\lambda \int_o^\infty e^{-\alpha^2\mu^2} d\mu = \int_o^\infty\int_o^\infty e^{-\alpha^2\left(\lambda^2+\mu^2\right)} d\lambda d\mu \qquad (1)$$

Для вычисления двойного интеграла перейдем к полярным координатам (r, φ) по формулам:

$\lambda = r \cos \varphi$, $\mu = r \sin \varphi$,

где $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$ и $0 \le \tau < +\infty$

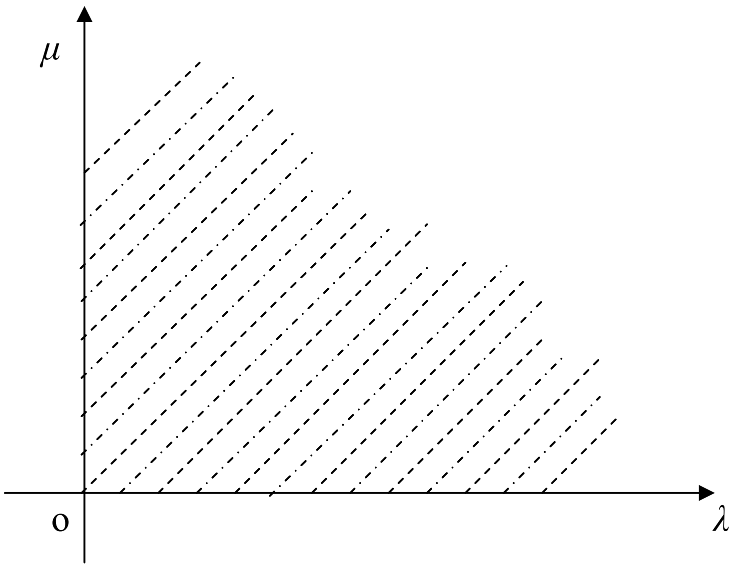

Рис. 4

В полярных координатах интеграл (τ) будет иметь вид:

$$\Im_o^2 = \int_o^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_o^{\infty} \tau dr\, e^{-\alpha^2 \tau^2} dr = \frac{\pi}{2} e^{-\alpha^2 r^2} \Big/ \left(-2\alpha^2\right)\Big|_o^{\infty} = \frac{\pi}{4\alpha^2}.$$

Таким образом

$$\Im_o = \frac{\sqrt{\pi}}{2\alpha} \qquad (1')$$

Рассмотрим теперь общий случай

$$\Im = \Im(\beta) = \int_o^{\infty} e^{-\alpha^2\lambda^2} \cos \beta\lambda d\lambda \qquad (2)$$

и $\Im_o = \Im(o) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2\alpha}$

Продифференцируем интеграл (2) по параметру β и интегрируя далее по частям, получим:

$$\Im'(\beta) = \int_o^{\infty} e^{-\alpha^2\lambda^2} (-\sin \beta\lambda)\lambda d\lambda = \left| \begin{array}{c} u = \sin \beta\lambda \\ d\upsilon = e^{-\alpha^2\lambda^2} \lambda d\lambda \\ du = \beta \cos \beta\lambda \\ \upsilon = e^{-\alpha^2\lambda^2} \Big/ \left(-2\alpha^2\right) \end{array} \right| = \frac{e^{-\alpha^2\lambda^2}}{2\alpha^2} \sin \beta\lambda \Big|_o^{\infty} - \frac{\beta}{2\alpha^2} \int_o^{\infty} e^{-\alpha^2\lambda^2} \cos \beta\lambda d\lambda$$

Так как двойная подстановка равна нулю, имеем дифференциальное уравнение:

$$\Im'(\beta)+\frac{\beta}{2\alpha^2}\Im(\beta)=0$$

Разделяя в нем переменные и интегрируя, получим

$$\ell n\Im+\frac{\beta^2}{4\alpha^2}=c \qquad (3)$$

Значение константы интегрирования c определим с помощью начального условия (1')

$$c=\ell n\frac{\sqrt{\pi}}{2\alpha}$$

Подставляя это значение в (3) получим:

$$\ell n\Im+\frac{\beta^2}{4\alpha^2}=\ell n\frac{\sqrt{\pi}}{2\alpha}$$

или, окончательно

$$\Im=\int_o^\infty e^{-\alpha^2\lambda^2}\cos\beta\lambda d\lambda=\frac{\sqrt{\pi}}{2\alpha}e^{-\frac{\beta^2}{4\alpha^2}} \qquad (4)$$

Задача о распределении температуры в неограниченном однородном стержне описывается уравнением теплопроводности и начальным условием (задача Коши для уравнения теплопроводности)

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}, \qquad (5)$$

$$u\big|_{t=o}=f(\xi) \qquad (6)$$

Будем решать эту задачу с помощью прямого

$$F(\alpha)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-i\alpha t}dt \qquad (7)$$

и обратного

$$f(t)=\frac{1}{\sqrt{2}\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\alpha)e^{i\alpha t}d\alpha \qquad (8)$$

преобразований Фурье.

Умножим обе части уравнения (5) на

$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\lambda\xi}$ и проинтегрируем по переменной ξ от $-\infty$ до $+\infty$:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial u(\xi, t)}{\partial t} e^{-i\lambda\xi} d\xi = \frac{d}{dt} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u(\xi, t) e^{-i\lambda\xi} d\xi = \frac{d}{dt} \bar{u}(\lambda, t),$$

где $\bar{u}$ - преобразование Фурье функции u.

$$a^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} e^{-i\lambda\xi} d\xi = \frac{a^2}{\sqrt{2\pi}} \left(- \frac{\partial u}{\partial \xi} e^{-i\lambda\xi} \Big|_{-\infty}^{+\infty} + i\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial u}{\partial \xi} e^{-i\lambda\xi} d\xi \right) =$$

$$= \frac{a^2}{\sqrt{2\pi}} i\lambda \left(u e^{-i\lambda\xi} \Big|_{-\infty}^{+\infty} + i\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} u e^{-i\lambda\xi} d\xi \right) = -a^2 \lambda^2 \bar{u}(\lambda, t),$$

так как $\lim\limits_{\xi \to \pm\infty} u = \lim\limits_{\xi \to \pm\infty} \frac{\partial u}{\partial \xi} = 0$ и функция $e^{i\lambda\xi}$ - ограничена

Таким образом, для изображения $\bar{u}$ получено обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$\frac{d\bar{u}}{dt} + a^2 \lambda^2 \bar{u} = 0 \tag{9}$$

Здесь $\bar{u}(\lambda, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u(\xi, t) e^{-i\lambda\xi} d\xi$

При $t = 0$

$$\bar{u}(\lambda, o) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u(\xi, o) e^{-i\lambda\xi} d\xi = \bar{f}(\lambda), \tag{10}$$

где $\bar{f}(\lambda)$ - преобразование Фурье функции $f(\xi)$.

Проинтегрировав уравнение (9) при начальном условии (10), получим:

$$\overline{u}(\lambda,t)=\overline{f}(\lambda)e^{-a^2\lambda^2 t}$$

или $$\overline{u}(\lambda,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)e^{-i\lambda\xi}\,e^{a^2\lambda^2 t}d\xi$$

Применим теперь обратное преобразование Фурье:

$$u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\overline{u}(\lambda,t)e^{i\lambda x}d\lambda=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)e^{i\lambda(x-\xi)}e^{-a^2\lambda^2 t}d\xi d\lambda=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)d\xi\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{+i\lambda(x-\xi)}e^{-a^2\lambda^2 t}d\lambda\ .$$

Если преобразуем $e^{i\lambda(x-\xi)}$ по формуле Эйлера

$$e^{i\lambda(x-\xi)}=\cos\lambda(x-\xi)+i\sin\lambda(x-\xi),$$

то получим сумму двух интегралов. Один из них равен нулю как интеграл от нечетной функции по симметричному промежутку. Поэтому

$$u(x,t)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)d\xi\int\limits_{o}^{\infty}\cos\lambda(x-\xi)e^{-a^2\lambda^2 t}d\lambda$$

или окончатель но

$$u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}d\xi \qquad (11)$$

Интеграл (11) являеnся решением задачи Коши для уравнения теплопроводности. Нетрудно проверить, что функция

$$\upsilon(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}} \qquad (12)$$

также удовлетворяет уравнению теплопроводности. Выясним физический смысл этого решения. Для этого рассмотрим элемент однородного стержня $(x_o - h,\ x_o + h)$. Если начальное распределение температуры в стержне

$$u\big|_{t=o} = e(X) = \begin{cases} u_o & x\in(x_o-h, x_o+h) \\ o & x\notin(x_o-h, x_o+h) \end{cases}$$

то в произвольный момент времени

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int\limits_{x_o-h}^{x_o+h} u_o e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}} d\xi$$

Пусть в начальный момент времени элемент стержня получил количество тепла Q

$Q = 2\, h\rho c u_o$

где ρ - линейная плотность,
c - теплоемкость

Тогда

$$u(x,t) = \frac{Q}{\rho c} \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int\limits_{x_o-h}^{x_o+h} \frac{1}{2h} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} d\xi$$

При $h \to 0$

$$u(x,t) = \frac{Q}{\rho c} \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \lim_{h\to 0} \frac{1}{2h} \int\limits_{x_o-h}^{x_o+h} e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}} d\xi$$

Применим к этому интегралу теорему о среднем значении

$$u(x,t) = \frac{Q}{\rho c} \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}, \qquad \text{где} \quad \xi \in (x_o - h, x_o + h)$$

или $u(x,t) = \dfrac{Q}{\rho c} \upsilon(x_o, t)$

То есть мы получили распределение температуры в стержне, если первоначальный разогрев был произведенв точке $x = x_o$. Таким образом функция $\upsilon(x, t)$ описывает распределение температуры в стержне от мгновенного, точечного источника (рис. 5).

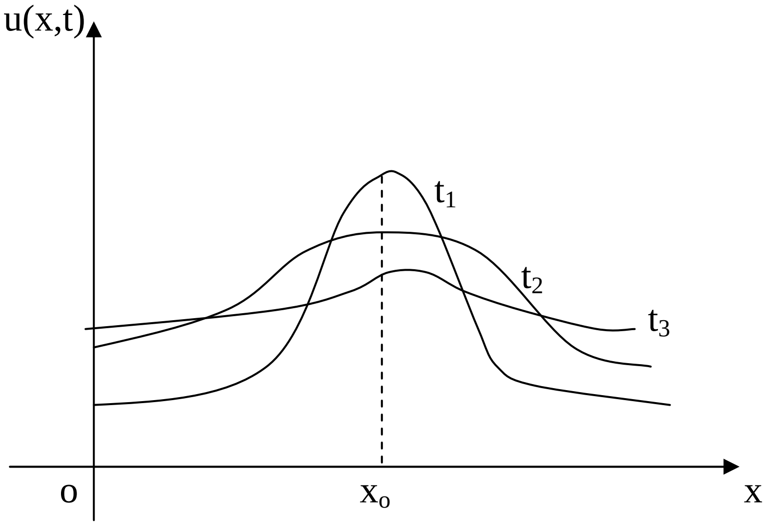

Рис. 5

§9. Метод сеток решения задачи Дирихле.

Для численного решения уравнений в частных производных необходимо уметь заменять частные производные приближенными разностными уравнениями.

Рассмотрим конечно-разностную аппроксимацию лапласиана:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

Пусть функция $u\ (\ x^*,\ y^*\ )$ имеет достаточное число непрерывных частных производных в некоторой окрестности точки $(\ x^*, y^*\ )$. Тогда:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x^*, y^*) = \frac{u(x^*+h, y^*) - 2a(x^*, y^*) + u(x^*-h, y^*)}{h^2} + 0(h^2) \qquad \text{и}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x^*, y^*) = \frac{u(x^*, y^*+h) - 2a(x^*, y^*) + u(x^*, y^*-h)}{h^2} + 0(h^2)$$

Складывая эти формулы, получаем:

$$\Delta u(x^* y^*) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} =$$

$$= \frac{1}{h^2}\left[u(x^*+h, y^*) + u(x^*-h, y^*) + u(x^*, y^*+h) + u(x^*, y^*-h) - 4u(x^* y^*)\right] + 0(h^2) \quad (1)$$

Таким образом, для подсчета лапласиана Δu необходимо знать значения функции $u(x,y)$ в пяти точках $(x^* \pm h, y^*)$, $(x^*, y^* \pm h)$, (x^*, y^*). На плоскости Oxy эти точки расположены следующим образом (рис.6):

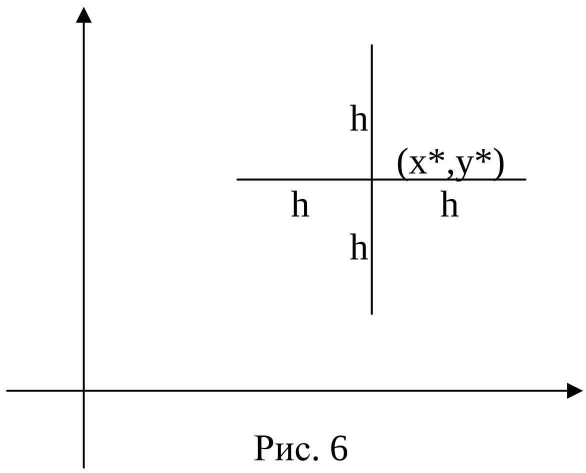

Рис. 6

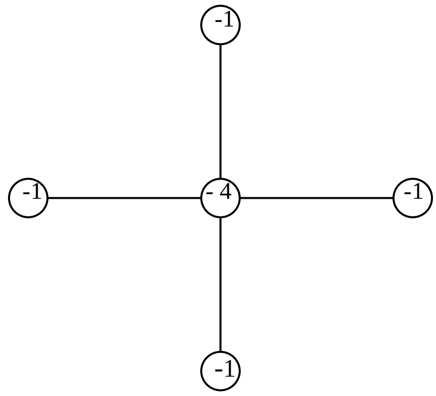

Рис. 7

Поэтому формулу (1) часто приводят в виде схемы (рис.7). величина в узле есть (с точностью до множителя $1/h^2$) коэффициент стоящий перед значением $u(x,y)$ в данном узле. Формула (1) дает наиболее часто встречающуюся, но не единственно возможную аппроксимацию лапласиана.

Рассмотрим задачу Дирихле для уравнения Пуассона:

$$\begin{cases} \Delta u = f, \\ u|r = \varphi, \end{cases}$$

где область G - прямоугольник $\{x_o \le x \le x_o + a, \quad y_o \le y \le y_o + b\}$

Пусть размеры прямоугольника таковы, что он допускает разбиение на сетку одинаковых квадратов со стороной h, причем вдоль основания укладывается N квадратов, а вдоль высоты - M. Отсюда следует, что $a = Nh$, $b = Mh$. Прямые разбиения перенумеруем так, как указано на рис. 8, ***точки их пересечения называются узлами сетки.*** Для краткости будем обозначать значение $\Phi(ih, jh)$ произвольной функции $\Phi(x, y)$ в узле сетки (ih, jh) через Φij, а сам узел - (i, j).

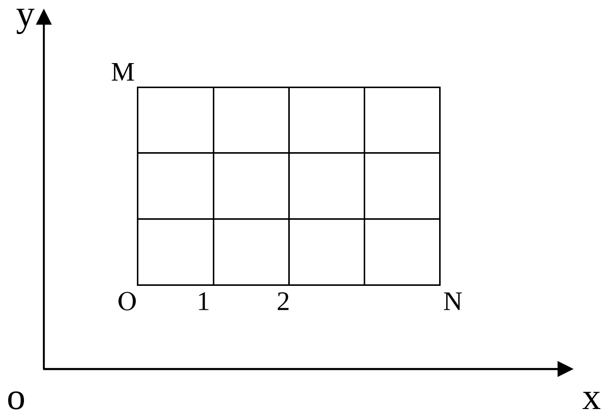

Рис. 8

Метод сеток краевой задачи (не обязательо задачи Дирихле) состоит в следующем: неизвестная функция $u\ (\ x,\ y\ )$ представляется своими значениями u_{ij} в дискретном множестве узлов сетки; дифференциальное выражение, краевые условия и правые части аппроксимируются конечными разностями. Затем решается полученная система сеточных уравнений.

Разностная схема (то есть совокупность способа разностной аппроксимации и метода решения системы сеточных уравнений) называется сходящейся, если при $h \to 0$ решение системы сеточных уравнений $\{\ u_{ij}\ \}$ стремится к точному решению $\{\ \hat{U}_{ij}\ \}$ краевой задачи.

Разностная схема, рассматриваемая здесь - сходящаяся, однако доказательство сходимости выходит за рамки настоящего пособия.

Используя разностную схему (рис.7) для $\Delta u,$ получаем следующую систему сеточных уравнений для задачи Дирихле:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{h^2}\left(u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{ij+1} + u_{ij-1} - 4u_{ij}\right) = f_{ij} & (2) \\ u_{ij}\big| r = \varphi_{ij} & (3) \end{cases}$$

Уравнение (2) имеет смысл лишь для внутренних узлов сетки, то есть для $1 \le i \le N - 1,\ \ 1 \le j \le M - 1.$ Напротив, уравнение (3) выполняется только ***для точек, лежащих на границе*** r ***(у них*** $i = 0$ ***или*** $i = N$, ***либо*** $j = 0$ ***или*** $j = M$ ***); такие точки называются контурными узлами.***

В конечном счете мы получаем систему из $(M+1)(N+1)$ уравнений с $(M+1)(N+1)$. В нашем случае, когда рассматривается задача Дирихле, последние $2(M+N)$ уравнения (3) уже решены; в случае других краевых условий это не так.

Систему (2), (3) можно решать различными способами. Изложим один из самых простых - метод последовательных приближений. Из формулы (2) выразим u_{ij}:

$$u_{ij} = \frac{1}{4}\left(u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - h^2 f_{i,j}\right).$$

Теперь можно организовать простой итерационный процесс:

$$u_{i,j}^{k+1} = \frac{1}{4}\left(u_{i+1,j}^{k} + u_{i-1,j}^{k} + u_{i,j+1}^{k} + u_{i,j-1}^{k} - h^2 f_{i,j}\right) \qquad (4)$$

$$1 \le i \le N, \qquad 1 \le j \le M,$$

$$u_{o,j}^{k} = \varphi_{o,j}, \quad u_{N,j}^{k} = \varphi_{N,j}, \quad u_{i,o}^{k} = \varphi_{i,o}, \quad u_{i,M}^{k} = \varphi_{i,M} \qquad (5)$$

Здесь верхний индекс означает номер приближения. Данные уравнения представляют собой уравнения метода простой итерации для системы (2), (3).

Метод последовательных приближений аналогичен процессу установления тепла, описываемому уравнением:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u - f \qquad (6)$$

Решение уравнения (6) с краевыми условиями Дирихле и произвольными начальными данными при $t \to \infty$ сводится к решению стационарной задачи. Можно проверить, что система уравнений (4) является разностной системой для дифференциального уравнения (6), если отрезок разбиения по x и y равны h, а отрезок разбиения по времени t равен $h^2/4$:

Итерационный процесс (2), (3) сходится независимо от начального приближения $u_{i,j}^{o}$. Однако, чтобы ускорить сходимость, в качестве начального приближения можно брать сеточную функцию, которая "не слишком уклоняется" от точного решения. Для уравнения $\Delta u=f$ таковой является, например, линейная интерполяция краевых условий, задающаяся формулой:

$$u_{i,j}^{o}=\frac{1}{2}\left[\varphi_{o,j}+\frac{i}{N}\left(\varphi_{N,j}-\varphi_{o,j}\right)+\varphi_{i,o}+\frac{j}{M}\left(\varphi_{i,1}-\varphi_{i,o}\right)\right].$$

Оценка погрешности разностной схемы производится с помощью так называемого правила Рунге.

Можно доказать, что разность $\varepsilon_{ij}(h)$ между значением решения системы (2), (3) $u_{ij}(h)$ на сетке с шагом h и значением в этом же узле точного решения u_{ij} удовлетворяет асимитотической формуле:

$$\varepsilon_{i,j}(h)=u_{i,j}(h)-u_{i,j}=c_{i,j}\cdot h^{2}+d_{i,j}\cdot h^{4}+\ldots=c_{i,j}\cdot h^{2}+o\cdot(h^{4}).$$

Тогда $\quad u_{i,j}\left(\frac{h}{2}\right)-u_{i,j}=\varepsilon_{i,j}\left(\frac{h}{2}\right)=0{,}25\cdot c_{i,j}\cdot h^{2}+o\cdot(h^{4}).$

Отсюда $\quad u_{i,j}(h)-u_{i,j}\left(\frac{h}{2}\right)=0{,}75h^{2}+o\cdot(h^{4})=0{,}75\varepsilon_{i,j}(h)+o\cdot(h^{4}).$

Для малых h это дает оценку погрешности

$$\varepsilon(h)=\frac{u}{3}\left[u(h)-u\left(\frac{h}{2}\right)\right].$$

Практически вычисления ведут каждый раз уменьшая h вдвое, до совпадения (с машинной точностью) $u(h)$ и $u(2h)$.

§10. Решение плоской задачи теории упругости в конечных разностях.

Для решения плоской задачи теории упругости при контуре прямоугольной области используют бигармоническое уравнение:

$$\frac{\partial^{4}\varphi}{\partial x^{4}}+2\frac{\partial^{4}\varphi}{\partial x^{2}\partial y^{2}}+\frac{\partial^{4}\varphi}{\partial y^{4}}=0, \qquad (1)$$

Требуется найти выражения для напряжений δ_x, δ_y, τ_{xy} решаемой задачи, пользуясь следующими формулами для напряжений:

$$\delta_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}; \qquad \delta_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}; \qquad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}, \tag{2}$$

где φ - бигармоническая функция (функция напряжений), которая должна удовлетворять условиям на контуре прямоугольной области.

Отыскание функции $\varphi(x,y)$ в (1) возможно различными методами: решение простой задачи в полиномах, решение плоской задачи в тригонометрических рядах, решение плоской задачи при помощи конечных разностей.

Точное решение бигармонического уравнения (1) плоской задачи во многих случаях оказывается очень сложным. Для его решения можно применить приближенный метод конечных разностей. Этот метод позволяет заменить дифференциальное уравнение системой линейных алгебраических уравнений.

Установим зависимости между производными функциями в произвольной точке и значениями функции в этой и в соседних точках. На рис. 9 изображена кривая $\varphi(x)$ и показаны пять точек, абсциссы которых отличаются на малую величину Δx. По определению производная функции $\varphi(x)$ в точке O равна

$$\varphi'_o = \ell im \frac{\varphi_1 - \varphi_{-1}}{2\Delta x}$$

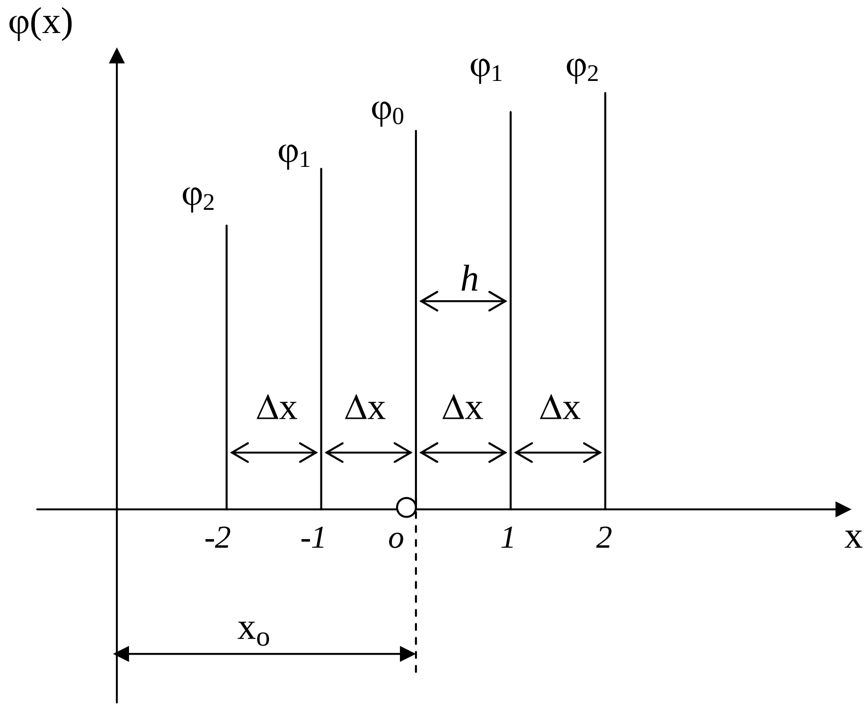

Рис. 9

Если интервал между двумя точками $h = \Delta x$ мал, то производную в точке O приближенно можно представить так:

$$\varphi_o' = \frac{1}{2h}\left(\varphi_1 - \varphi_{-1}\right), \qquad (a)$$

Аналогично можно представить производную в точке *1*:

$$\varphi_1' = \frac{1}{2h}\left(\varphi_2 - \varphi_o\right)$$

и в точке *-1*:

$$\varphi_{-1}' = \frac{1}{2h}\left(\varphi_o - \varphi_{-2}\right)$$

Вторую производную в точке O можно получить, используя дважды представление первой производной:

$$\varphi_o'' = \left(\varphi'\right)_o' = \frac{1}{2h}\left(\varphi_1' - \varphi_{-1}'\right) = \frac{1}{2h}\left[\frac{1}{2h}\left(\varphi_2 - \varphi_o\right) - \frac{1}{2h}\left(\varphi_o - \varphi_{-2}\right)\right] = \frac{1}{4h^2}\left(\varphi_2 - 2\varphi_o + \varphi_{-1}\right)$$

Уменьшая интервал в два раза, можно получить более точное значение второй производной в точке O:

$$\varphi_o'' = \frac{1}{h^2}\left(\varphi_1 - 2\varphi_o + \varphi_{-1}\right). \tag{б}$$

Далее вычисляем третью производную в точке O:

$$\varphi_o''' = \left(\varphi''\right)_o' = \frac{1}{h}\left(\varphi_1'' - \varphi_{-1}''\right) = \frac{1}{h}\left[\frac{1}{h^2}\left(\varphi_2 - 2\varphi_1 + \varphi_o\right) - \frac{1}{h^2}\left(\varphi_o - 2\varphi_{-1} + \varphi_{-1}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{h^2}\left(\varphi_2 - 2\varphi_1 + 2\varphi_{-1} - \varphi_{-2}\right), \tag{в}$$

а затем и четвертую:

$$\varphi_o^{\mathrm{IY}} = \left(\varphi''\right)_o'' = \frac{1}{h^2}\left(\varphi_1'' - 2\varphi_o'' + \varphi_{-1}''\right) =$$

$$= \frac{1}{h^2}\left[\frac{1}{h^2}\left(\varphi_2 - 2\varphi_1 + \varphi_o\right) - \frac{2}{h^2}\left(\varphi_1 - 2\varphi_o + \varphi_{-1}\right) + \frac{1}{h^2}\left(\varphi_o - 2\varphi_{-1} + \varphi_{-2}\right)\right] =$$

$$\frac{1}{h^4}\left(\varphi_2 - 4\varphi_1 + 6\varphi_o - 4\varphi_{-1} + \varphi_{-2}\right). \tag{г}$$

В случае плоской задачи функция φ будет функцией двух координат x и y, поэтому появится необходимость выражать через конечные разности частные производные. Для этого исследуемую плоскую область (рис. 2) разбивают сеткой на ячейки с размерами Δx и Δy. Для упрощения расчетов сетку выбирают с

принимают $\Delta x = \Delta y = h$. В дальнейшем будут рассматриваться только сетки с квадратными ячейками. Частные производные от функции $\varphi\,(x,y)$ в точке O могут быть выражены через значения функции в тринадцати точках, пронумерованных на рисунке.

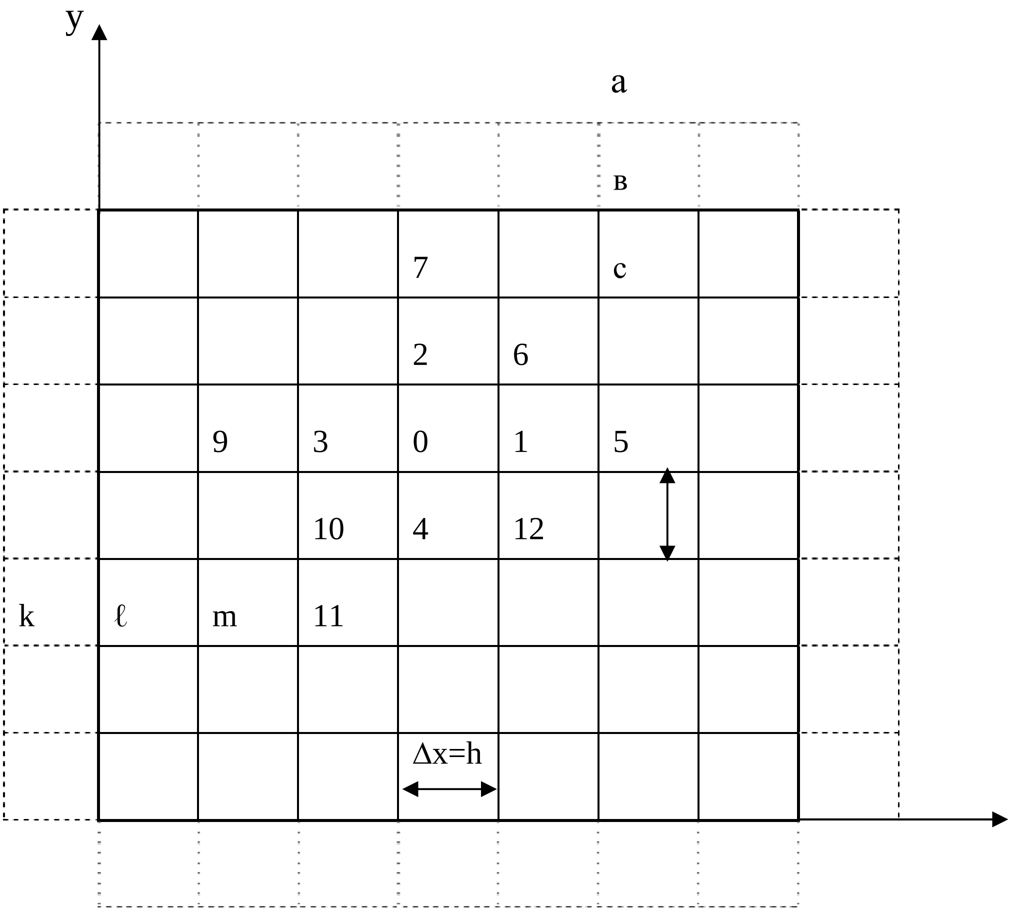

Рис. 10

Первые и вторые производные в точке по одной из координат легко составить по аналогии с формулами *(а)* и *(б):*

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_o &= \frac{1}{2h}(\varphi_1-\varphi_2),\\ \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)_o &= \frac{1}{2h}(\varphi_2-\varphi_4),\end{aligned}\right\} \qquad (\text{д})$$

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right)_o &= \frac{1}{2h^2}(\varphi_1-2\varphi_o+\varphi_3),\\ \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right)_o &= \frac{1}{2h^2}(\varphi_2-2\varphi_o+\varphi_4),\end{aligned}\right\} \qquad (\text{е})$$

Вторую смешанную производную в точке O найдем, применив дважды формулы (д):

$$\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}\right)_o = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_o = \frac{1}{2h}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_2 - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_4\right] =$$

$$= \frac{1}{2h}\left[\frac{1}{2h}(\varphi_6 - \varphi_8) - \frac{1}{2h}(\varphi_{12} - \varphi_{10})\right] =$$

$$= \frac{1}{4h^2}(\varphi_6 - \varphi_8 + \varphi_{10} - \varphi_{12}). \qquad (\text{ж})$$

Четвертые частные производные по одной из координат в точке O составим согласно формуле:

$$\alpha = \frac{n\pi}{\ell},$$

где n - любое целое число;

ℓ - длина пластинки в направлении оси x.

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^4}\right)_o &= \frac{1}{h^4}(\varphi_5 - 4\varphi_1 + 6\varphi_o - 4\varphi_3 + \varphi_9), \\ \left(\frac{\partial^4\varphi}{\partial y^4}\right)_o &= \frac{1}{h^4}(\varphi_7 - 4\varphi_2 + 6\varphi_o - 4\varphi_4 + \varphi_{11}), \end{aligned}\right\} \qquad (\text{з})$$

а четвертую смешанную производную найдем, применяя дважды формулу (е):

$$\left(\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^2\partial y^2}\right)_o = \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right) = \frac{1}{h^2}\left[\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right)_2 - 2\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right)_o + \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right)_4\right] =$$

$$= \frac{1}{h^2}\left[\frac{1}{h^2}(\varphi_o - 2\varphi_2 + \varphi_8) - \frac{2}{h^2}(\varphi_1 - 2\varphi_o + \varphi_3) + \frac{1}{h^2}(\varphi_{12} - 2\varphi_4 + \varphi_{10})\right] =$$

$$= \frac{1}{h^4}\left[4\varphi_o - 2(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4) + (\varphi_6 + \varphi_8 + \varphi_{10} + \varphi_{12})\right]. \qquad (\text{к})$$

Связь между функциями в тринадцати рассматриваемых точках установлен с помощью бигармонического уравнения плоской задачи (1). В точке O оно принимает вид:

$$\left(\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^4}\right)_o + 2\left(\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^2\partial y^2}\right)_o + \left(\frac{\partial^4\varphi}{\partial y^4}\right)_o = 0.$$

Подставляя в него четвертые производные из формул (з) и (к) получаем:

$$20\varphi_o - 8(\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3+\varphi_4) + 2(\varphi_6+\varphi_8+\varphi_{10}+\varphi_{12}) + (\varphi_5+\varphi_7+\varphi_9+\varphi_{11}) = 0. \qquad (3)$$

Напряжения в точке O найдем с помощью формул (2) без учета объемных сил:

$$\left.\begin{aligned}
(\delta_x)_o &= \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right)_o = \frac{1}{h^2}(\varphi_2 - 2\varphi_o + \varphi_4)\\
(\delta_y)_o &= \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right)_o = \frac{1}{h^2}(\varphi_1 - 2\varphi_o + \varphi_3)\\
(\tau_{xy})_o &= -\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}\right) = -\frac{1}{4h^2}(\varphi_6 - \varphi_8 + \varphi_{10} - \varphi_{12})
\end{aligned}\right\}. \qquad (4)$$

Уравнения вида (3) можно составить для каждого из узлов внутри контура: при этом в часть уравнений войдут и значения функции φ для узлов на контуре и для узлов, расположенных на расстоянии одного шага вне контура. На рис. 10 внеконтурная сетка показана штрихами.

Значения функции φ на контуре и вне контура находят из граничных условий. Таким образом, неизвестных значений функции окажется столько, сколько узлов внутри контура, но столько же можно составить уравнений вида (3). Следовательно, для решения вышеизложенной задачи уравнений достаточно.

Литература

1. Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Основные дифференциальные уравнения математической физики. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1962.

2. Демидович Б.П., Марон И.А., Шувалова Э.З. Численные методы анализа. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1964.

3. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Издательство "Наука", 1977.

4. Арсенин В.Я. Математическая физика. М.: Издательство "Наука", 1966.

5. Самуль В.И. Основы теории упругости и пластичности. М.: Высшая школа, 1970.