Аналитическая геометрия?

(Методическая разработка по решению задач ЕГЭ методами аналитической геометрии)

Автор – Б. Ф. Мельников
(http://www.mathnet.ru/php/person.phtml?personid=27967
+7 916 7229756, +7 987 9771599)

Введение.

Название пособия специально сформулировано нами как односоставное вопросительное предложение: мы будем решать задачи, которые *обычно* в школьном курсе решаются без применения аналитичесой геометрии. Однако она (аналитическая геометрия) не должна «вызывать паники»: во-первых, её элементы в школьном курсе обычно появляются довольно рано (в районе 5-го класса, до «разделения» математики на алгебру и геометрию); во-вторых, как показывает опыт, применение аналитической геометрии (и знание очень небольшого числа формул) часто способно существенно облегчить решение задачи.

При этом, употребляя слова «облегчить решение», мы имеем в виду вовсе не сокращение записи этого решения; мы имеем в виду *применение некоторых приёмов, которые должны наверняка к решению привести*. Конечно, мы всюду понимаем, что существуют и другие методы решения каждой из рассматриваемых нами задач. Итак, мы не претендуем на то, что прмменяем самый простой способ; повторим, что мы применяем то, что наверняка ведёт к цели. Также очень важно следующее: мы в первую очередь показываем не «просто решение», а показываем *как* её решали, *почему* выбирали именно такой способ . . .

Подзаголовок пособия – не «по аналитической геометрии», а «методами аналитической геометрии». Легко понять, что одно из важных отличий методов аналитической геометрии от «обычных геометрических» методов (вероятно, самое важное отличие?) – это минимально возможное использование чертежей («картинок»); нередко задачу можно решить вообще «без картики». Мы здесь стараемся действовать подобным образом – «алгоритмически»; при этом нам часто даже не нужно то, что обычно называют «геометрическим воображением»[1].

Итак, только что методам аналитической геометрии было высказано много плюсов (аргументов «за»); но, очевидно, не может не быть и аргументов «против». И они действительно имеются – причём, на самом деле, это только один «плохой» аргумент (один – но большой): нам необходимо

[1] То есть данное пособие особенно рекомендуется тому, кто считает, что такого «геометрического воображения» не имеет. Возможно, это шутка – но с большой долей правды.

знание некоторых дополнительных формул[2]. Таких формул, однако, совсем немного; здесь, во введении, мы их просто перечислим – а далее, в процессе решения задач, мы приведём сами формулы и объясним особенности их использования.

Причём такой «новой» формулой *не стоит* считать формулу расстояния между двумя точками – причём даже в трёхмерном случае (она просто следует из теоремы Пифагора). Нужными нам формулами (понятиями) являются следующие:

- прямая и плоскость в пространстве;
- параметрическая запись прямой;
- расстояние от точки до прямой на плоскости и до плоскости в пространстве;
- направляющий вектор прямой и условие перпендикулярности двух прямых (векторов).

Повторим, что сами эти формулы и их способы применения будут рассморены ниже, в процессе решения задач.

Ещё одно замечание сделаем о стереометрических задачах (в нашей терминологии – о трёхмерном случае). Такие задачи часто «пугают» выпускников только самим наличием трёх измерений[3]. Вообще, по-видимому, при использовании методов аналитической геометрии «средние» стереометрические (трёхмерные) задачи не сложнее «средних» планиметрических (двумерных); в настоящем пособии стереометрические и планиметрические задачи приведены примерно по увеличению сложности – вне зависимости от размерности.

Пора приступить к самим задачам. Все они – уровня сложных задач ЕГЭ, взяты как из реальных вариантов ЕГЭ, так и из письменных вступительных экзаменов в МГУ (причём как задач «доегэшного» времени, так и современных). В некоторых случаях мы приводим ссылки на сайты, с которых взяты задачи.

Задача 1. (Источник: письменные вступительные экзамены МГУ, 1961–2015 г.г.)

Из середины D гипотенузы AB прямоугольного треугольника ABC проведён луч, перпендикулярный к гипотенузе и пересекающий один из катетов. На нём отложен отрезок DE, длина которого равна половине длины отрезка AB. Длина отрезка CE равна 1 и совпадает с длиной одного из катетов. Найти площадь треугольника ABC.

---

[2] А *при оформлении* экзаменационной работы крайне желательно *явно выписывать* применяемую формулу!

[3] Мы выше говорили о возможном «отсутствии геометрического воображения» – понятно, что отсутствие стереометрического воображения «случается гораздо чаще»! Но задачи-то решать надо! И, по-видимому, проще научиться «переводить фигуры в формулы» – чем развить у себя это стереометрическое воображение.

Решение.

По-видимому, *при расстановке точек на координатной плоскости* единственной сложностью является такой вопрос: какой именно катет равен 1? тот, который пересекается с построенным нами лучом, – или тот который с ним не пересекается? Отметим, что этот на вопрос можно ответить «геометрически» (причём некоторые могут даже сказать не «можно ответить» а «нужно ответить») – однако мы, как уже было отмечено, выбираем «аналитические» варианты ответа на подобные вопросы.

Итак, приняв естественное решение о том, что катеты треугольника лежат на осях координат, расставим следующим образом точки (рис. 1). При этом мы, не ограничивая общности, будем всё время (в обоих рассматриваемых далее случаях) считать, что на оси OX лежит больший катет.

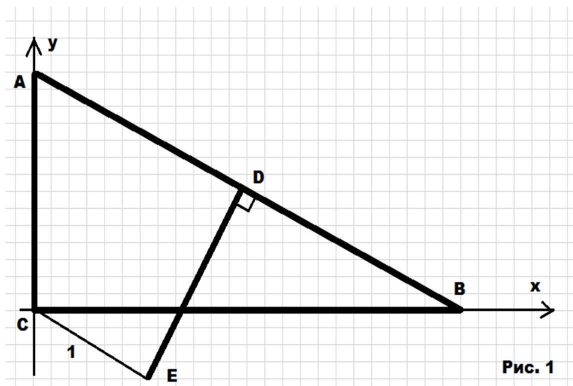


Рис. 1

Отметим сразу следующий очень важный факт: мы на рисунке *не добились* того, чтобы длина отрезка CE совпадала бы с длиной одного из катетов! Однако: мы же «не умеем рисовать»! Кроме того, при *реальном* решении задачи (на экзамене и не только) рисунок появляется до того, как расставляются координаты. Поэтому не будем «зацикливаться» на том, что реальные длины нарисованных нами отрезков не совсем похожи на необходимые – и сначала предположим, что значение 1 имеет «лежачий» (больший!) катет. При этом координаты точек можно расставить следующим образом – см. рис. 2.

Конечно же, к расстановке координат точек необходимы комментарии. Первыми, согласно сделанным нами предположениям, ставим координаты точек A и B: $A(0, y_A)$ (y_A будет единственной переменной) и $B(1, 0)$. Далее получаем координаты точки D – середины отрезка AB; как всегда для середины отрезка, каждая из координат точки-середины равна полусумме соответствующих координат двух точек-концов: $D(\frac{1}{2}, \frac{y_A}{2})$.

Крайне важным является построение координат точки E. Мы не будем приводить подробную теорию – ограничимся кратким изложением (причём «на пальцах»); отметим, однако, что подобные рассуждения вполне могут быть приведены в работе (ЕГЭ и др.) – практически невероятно,

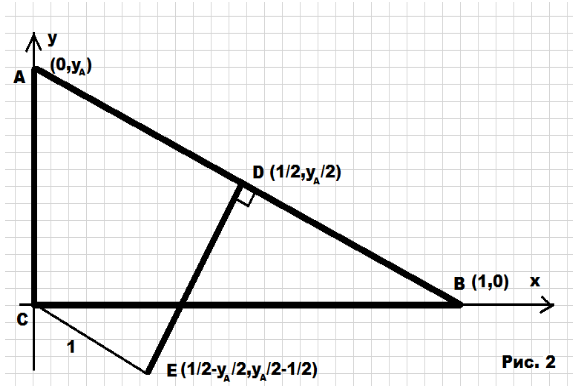


Рис. 2

что к ним «придерутся». Вектора $\overrightarrow{DB}$ и $\overrightarrow{DE}$ взаимно перпендикулярны – и таковыми, как несложно убедитьтся, при любых a и b (не равных 0 одновременно) являются вектора (a, b) и $(b, -a)$; последнее проще всего объяснить, выписав скалярное произведение этих векторов:

$$(a, b) \cdot (b, -a) = a \cdot b - b \cdot a = 0\,;$$

более того, у этих векторов (a, b) и $(b, -a)$ длины одинаковы. Поэтому при построении точки E мы изменяем координаты точки D на вектор, получающийся из вектора $\overrightarrow{DB}$ путём перестановки его координат и изменением значения одной из них на обратное. Таким образом получаем

$$E\left(\frac{1}{2} - \frac{y_A}{2}, \frac{y_A}{2} - \frac{1}{2}\right);$$

заметим, что мы *заодно* выяснили, что наш чертёж «не совсем правильный» (поскольку E, как следует из вычислений, лежит на биссектрисе 4-го координатного угла) – ну и что? «На то и стоим», что важен не чертёж, а связанные с ним координаты точек (и другие, более сложные объекты, но тоже записанные аналитически).

Далее из условия $CE = 1$ несложно получаем, что $\frac{1}{2} - \frac{y_A}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, откуда получаем отрицательное значение для y_A, что *при сделанных нами предположениях* невозможно. Таким образом, невозможен рассматриваеый нами случай (т.е. когда значение 1 принимает больший катет).

Рассмотрим второй случай («симметричный» относительно биссектрисы координатного угла), координаты точек расставим следующим образом – рис. 3.

Как и ранее, мы «не попали» построенной нами точкой E на биссектрису 4-го координатного угла. Однако, поскольку уравнение $\frac{x_B}{2} - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ имеет положительное решение, случай возможен. Теперь мы несложно вычисляем длину большего катета $1 + \sqrt{2}$ и площадь

$$\frac{1 + \sqrt{2}}{2}.$$

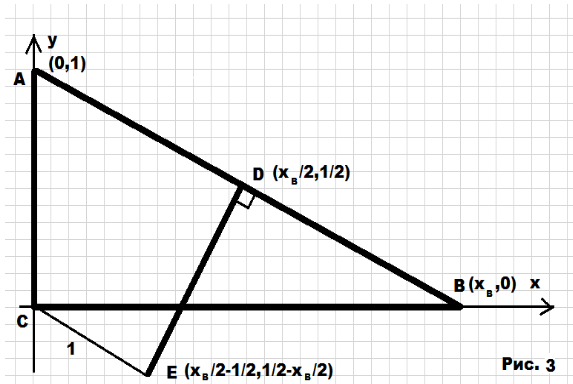


Рис. 3

Закончим рассмотрение задачи следующим замечанием. Можно было бы рассмотреть *только один* случай (объединяющий оба рассмотренных нами варианта, т.е. допускающий обе возможности в зависимости от конкретных значений координат). Подобный подход мы буем применять в следующих задачах.

□

Задача 2. (Источник: письменные вступительные экзамены МГУ, 1961–2015 г.г.)

В трапеции $ABCD$ сторона AD является бо́льшим основанием. Известно, что $AD = CD = 4\frac{2}{3}$, $\angle BAD = 90^o$, $\angle BCD = 150^o$. На основании AD построен треугольник AED так, что точки B и E лежат по одну сторону от прямой AD, причём $AE = DE$. Длина высоты этого треугольника, проведённой из вершины E, равна $1\frac{2}{5}$. Найти площадь общей части трапеции $ABCD$ и треугольника AED.

Решение.

Интуитивно понятно, что меньшее основание более чем в 2 раза меньше большего – строго это будет показано далее. (Впрочем, на решение задачи этот факт существенного влияния не окажет.) Поэтому после того, как мы расставим «участвующие в условии» точки, дальнейший ход решения будет зависить от того, какая именно из следующих 3 ситуаций выполнена (см. рис. 4).

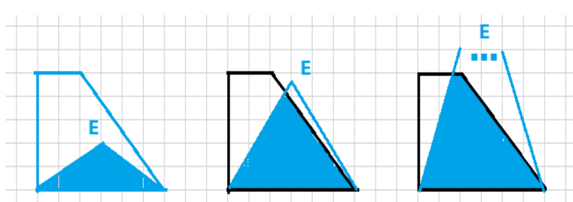


Рис. 4

При этом, *в отличие от задачи 1*, мы не обязаны рассматривать различные возможные случаи (впрочем, напомним ещё раз, что и в задаче 1 можно было без этого обойтись) – поскольку мы *сможем определить*, какой именно случай выполнен, просто вычислив координаты точки E. Более того, мы не будем заранее расписывать все условия для каждого из трёх случаев – зачем? Просто найдём её координаты – но перед этим отметим следующий факт. Обычно, когда в условии задачи задан прямой угол, его стороны удобно расположить на координатных прямых – но в этой задаче будут использоваться две пряые, проходящие через вершину единственного острого угла трапеции. Это обстоятельство должно навести на мысль, что именно вершину острого угла трапеции (т.е. точку D) удобнее разместить в начале координат.

Итак, размещаем точки на координатной плоскости в следующем порядке. Сначала – $D(0,0)$, далее – $A(\frac{14}{3},0)$. Из того, что $\angle CDA = 30^o$ и $CD = \frac{14}{3}$, получаем, что $C(\frac{7}{\sqrt{3}},\frac{7}{3})$ и $B(\frac{14}{3},\frac{7}{3})$. Из равнобедренности треугольника AED получаем $E(\frac{7}{3},\frac{7}{5})$. Мы, *немного забегая вперёд*, изобразим точки следующим образом (рис. 5);

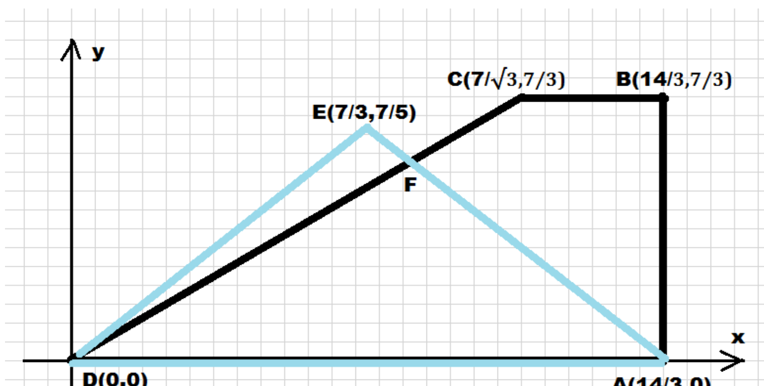


Рис. 5

для доказательства правильности такого размещения (т.е. того, что выполнен «средний» случай рисунка 4) нам *достаточно* доказать два таких факта: во-первых, что точка E расположена «ниже» стороны BC – это следует из очевидного неравенства $\frac{7}{5} < \frac{7}{3}$; и во-вторых, что луч DE расположен «ниже» луча DC. Последнее же следует из неравенства

$$\frac{7/5}{7/3} > \frac{7/3}{7/\sqrt{3}}$$

(сравнние тангенсов углов наклона лучей), которое проверяется несложно – но при оформлении работы должно быть доказано; например, после преобразований получаем, что оно равносильно неравенству $\frac{3}{5} > \frac{\sqrt{3}}{3}$, которое, в свою очередь, проверяется возведением в квадрат. (Отдельно отметим, что этот «средний» случай рисунка 4 мог быть выполнен и при E, лежащей «выше» стороны BC, плюс при выполнении ещё одного условия – но эта возможность в рассматриваемой нами задаче не пригодится.)

Итак, общая часть трапеции $ABCD$ и треугольника AED – это треугольник AFD, где точка F – пересечение прямых AE и DC; при этом нам нужна только y-координата точки F. Уравнение прямой DC таково: $y = x/\sqrt{3}$, а процесс построения уравнения прямой AE рассмотрим немного подробнее. Эта прямая (пусть $y = kx + b$) проходит через точки $A(\frac{14}{3}, 0)$ и $E(\frac{7}{3}, \frac{7}{5})$. Подставив в уравнение этой прямой координаты обеих точек, получаем два уравнения (относительно k и b!):

$$0 = \frac{14}{3}k + b \quad \text{и} \quad \frac{7}{5} = \frac{7}{3}k + b\,;$$

решив систему, состоящую из этих двух уравнений, получаем $k = -\frac{3}{5}$ и $b = \frac{14}{5}$.

Далее рассматриваем систему, состоящую из двух найденных нами уравнений прямых; решение этой системы и будет координатами точки пересечения прямых; напомним также, что нам достаточно знать только y-координату этой точки. Итак,

$$y = \frac{x}{\sqrt{3}} \quad \text{и} \quad y = -\frac{3}{5}x + \frac{14}{5}\,,$$

откуда $y = 21\sqrt{3} - 35$, а площадь треугольника AFD равна

$$\frac{7}{3} \cdot \left(21\sqrt{3} - 35\right).$$

(Возможно, процесс построения прямой, проходящей через две заданные точки, можно было и не описывать так подробно, как мы сделали выше. Основная причина подробного рассмотрения такова: мы здесь в очень простом случае рассмотрели т.н. *метод неопределённых коэффициентов*, который в более сложном виде будет неоднократно использоваться в различных *студенческих* математических курсах. Также отметим, забегая вперёд, что прямую можно задать и иными способами, не только в виде уравнения вида $y = kx + b$; в следующих задачах будет приведён подобный пример задания прямой другим способом – «параметрически».)

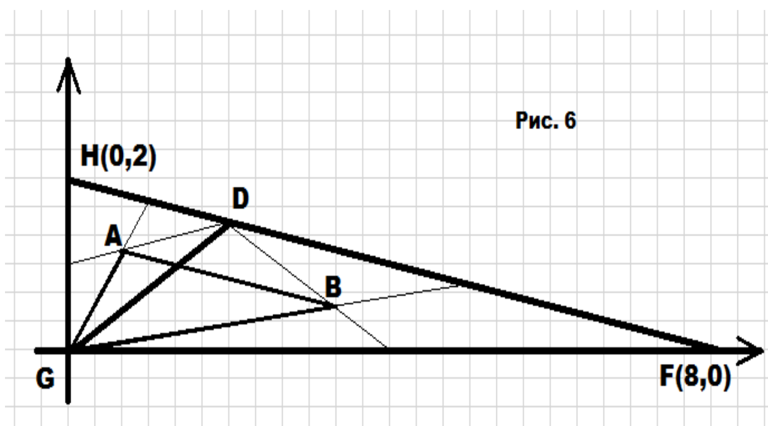
□

Задача 3. (Источник: письменные вступительные экзамены МГУ, 1961–2015 г.г.)

В треугольнике FGH угол G прямой, $FG = 8$, $GH = 2$. Точка D лежит на стороне FH, а A и B – точки пересечения медиан треугольников FGD и DGH. Найдите площадь треугольника GAB.

Решение.

В задаче появляется следующий интересный момент: *точно* расставить точки мы *не можем*! При их расстановке имеется одна «степень свободы»! Приходится вводить неизвестную координату – фактически представляющую собой параметр. В большинстве подобных задач (видимо, во всех) значение этого параметра *не войдёт* в окончательный ответ (таким образом и подбирается искомая величина). Зато – несмотря на отмеченную проблему – в подавляющем большинстве подобных задач в качестве предварительного возможно такое «немного нахальное» решение (которое и подскажет верное решение): мы значение этой координаты (этого параметра) выбираем произвольно – так, как легче расставить точки! В нашей задаче мы приведём даже два таких «немного нахальных» решений – после чего приведём правильное решение.

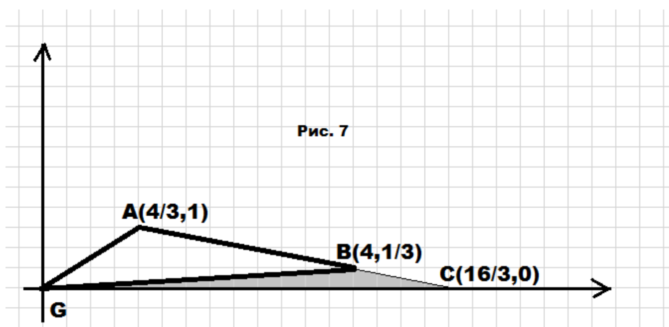


Итак, сначала расставим точки: $H(0,2)$, $F(8,0)$ – а дальше? Всегда в подобных случаях мы одну неизвестную координату обозначали переменной; при этом для нескольких (одной, двух или трёх) переменных мы обычно составляли такое же количество уравнений – но здесь у нас нет условий для составления даже одного уравнения!

Однако, следуя кратко сформулированному выше «немного нахальному» способу решения, мы поставим точку D «в удобном для нас месте». (И ещё раз отметим, что оба этих способа в итоговое решение включать не надо: они могут пригодиться для самопроверки на экзамене.)

В качестве первого из таких «удобных мест» рассмотрим точку D совпадающую с H; при этом не должно смущать то, что один из двух треугольников *вырождается* в отрезок! При этом «верхняя» сторона треугольника вырождается в точку H, медиана, выходящая из вершины G, становится отрезком GH (в него же вырождается весь треугольник), точка A, делящая медиану в отношении $2:1$, имеет координаты $(\frac{4}{3}, 0)$, а треугольник FGD совпадает с треугольником FGH. Для построения точки B (точки пересечения медиан последнего треугольника) выпишем уравнения прямых, на которых лежат две из его медиан; здесь это даже проще, чем делить медиану на 3 части, чем мы ещё воспользуемся. Прямые выписываются несложно: медиана, проходящая через G, лежит на прямой $y = x/4$, а медиана, проходящая через D (или, что то же самое, H), лежит на прямой $y = 2 - x/2$. Координаты точки B при этом получаются $(\frac{8}{3}, \frac{2}{3})$ (нам нужна только x-координата), а площадь треугольника GAB равна $16/9$.

В качестве второго из таких «удобных мест» мы *не будем* рассматривать совпадение точек D и F: этот случай мало отличается от предыдущего (в частности, совпадает точка пересечения медиан «реального» треугольника), площадь построенного при этом треугольника GAB та же, $16/9$. Поэтому рассмотрим немного более сложный случай (но тоже «непараметрический»): пусть теперь D лежит *на середине* отрезка HF, т.е. $D(4, 1)$. При этом для треугольника GHD уравнения двух прямых, на которых лежат медианы, таковы: $y = \frac{3}{4}x$ и $y = 1$, поэтому точка пересечения медиан $A(\frac{3}{4}, 1)$. (Снова – выписать две прямые не сложнее, чем делить медиану на 3 части.) А для треугольника GFD уравнения двух прямых, на которых лежат медианы, таковы: $y = \frac{1}{12}x$ и $x = 4$ (последняя не является графиком функции – но это не должно смущать), поэтому точка пересечения медиан этого треугольника – $B(4, \frac{1}{3})$.

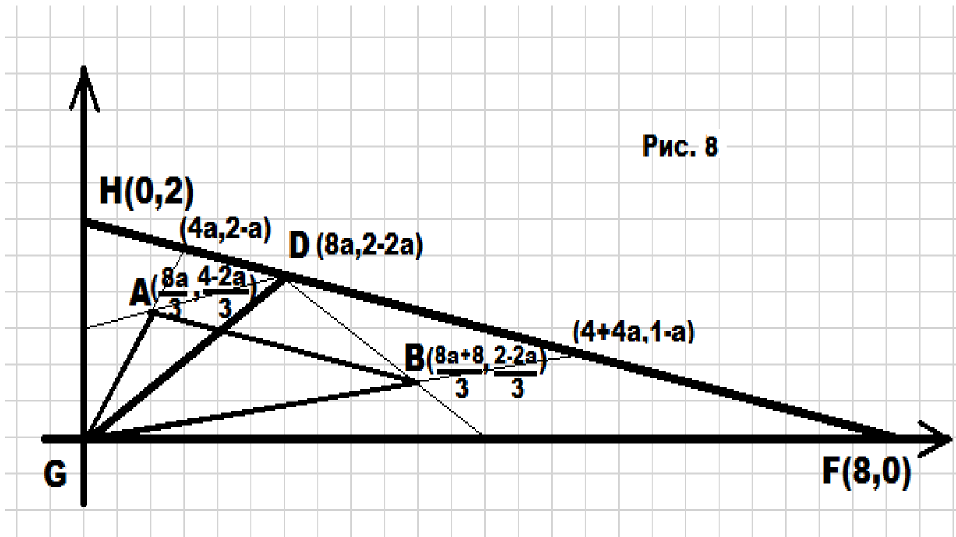


Итак (рис. 7) посчитаем площадь треугольника GAB. Легко понять, что «красивое» (не содержащее радикалов) значение имеет только одна из сторон этого треугольника, поэтому, видимо, наиболее простой способ вычисления его площади – построить пересечение прямой AB с осью OX (пусть это будет точка C) и найти площадь искомого треугольника как разность площадей треугольников GAC и GBC. Координаты C получаем несложно: $C(\frac{16}{3}, 0)$, поэтому

$$S_{\triangle GAB} = S_{\triangle GAC} - S_{\triangle GBC} = \frac{1}{2} \cdot x_C \cdot (y_A - y_B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{16}{3} \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{16}{9}.$$

Как и ожидалось, мы получили значение, совпадающее с предыдущим случаем.

При решении задачи на экзамене из того, что в обоих частных случаях (на самом деле, даже в трёх) мы получили одно и то же значение площади, «заключаем», что и в общем случае значение должно получиться таким же, *причём не зависящим от параметра*. Это мы и будем доказывать далее – причём также *используя технику, рассмотренную нами в предыдущих случаях*[4].



Итак, расположим точки (рис. 8). Координаты точки D зависят от параметра (пусть a); удобно положить её x-координату равной $8a$ – тогда будет выполнено условие приведённое в сноске. При этом y-координата будет равна $2-2a$. У середины отрезка HD координаты $(4a, 2-a)$, поэтому координаты точки пересечения медиан A «левого» треугольника (их в данном случае удобнее считать как «$\frac{2}{3}$ до середины отрезка HD», а не выписывая уравнения двух прямых) таковы: $A(\frac{8a}{3}, \frac{4-2a}{3})$. Аналогично у середины отрезка HD координаты $(4+4a, 1-a)$, поэтому координаты точки пересечения медиан B «правого» треугольника таковы: $B(\frac{8+8a}{3}, \frac{2-2a}{3})$.

Для дальнейшего удобно обозначить $b = \frac{2a}{3}$ (границы возможного изменения параметров a и b выписывать не будем – они вычисляются просто). Таким образом, нужно посчитать площадь треугольника GAB с вершинами $G(0,0)$, $A(4b, \frac{4}{3}-b)$ и $B(\frac{8}{3}+4b, \frac{2}{3}-b)$, причём, как мы отсмечали, *уже в само́м условии* имеется неявная подсказка, что эта площадь от b (или от a, что то же самое) не зависит. Эта подсказка должна навести на мысль, что при любом b:

- прямая AB – одна и та же;
- причём также одна и та же – длина отрезка AB.

[4] Приведём ещё и такой *косвенный аргумент*. Рассмотрим функцию площади, зависящую от параметра, у которого, например, значение 0 соответствует делению гипотенузы точкой D, совпадающей с H; значение $\frac{1}{2}$ соответствует точке D, лежащей на середине HF; а значение 1 соответствует точке D, совпадающей с F. Эта функция в трёх указанных точках принимает равные значения – и, «следовательно», равна константе.

То же самое предположение может возникнуть и при попытке вычислить длины сторон треугольника GAB: при этом длина только одной из них (а именно, AB) получается «хороший» результат – а в остальных двух случаях выражения получаются очень сложными.

«Почти всё», что нам следует доказать, вытекает из того, что вектор $\overrightarrow{AB}$ *не зависит от параметра* (т.е. от параметра не зависят ни его длина, ни направление); отметим, что подобные факты в процесс решения задач *обязательно сто́ит замечать*! Действительно, $\overrightarrow{AB} = (\frac{8}{3}, -\frac{2}{3})$, и для завершения доказательства нам, *например*, остаётся показать, что *независимо от параметра* прямая AB пересекает ось OX (другой вариант – пересекает ось OY) в одной и той же точке. На основе рассмотренных примеров получаем подсказку: на оси OX таковой должна быть точка с абсциссой $\frac{16}{3}$ (пусть это опять C). Нужный нам факт выводится из пропорции

$$\frac{x_C - x_B}{y_B} = \frac{x_C - x_A}{y_A}\,,$$

которая непосредственно проверяется (и выполняется при любых возможных значниях параметра):

$$\frac{\frac{16}{3} - \frac{8}{3} - 4b}{\frac{2}{3} - b} = \frac{\frac{16}{3} - 4b}{\frac{4}{3} - b}\,;$$

оба отношения при любых возможных значниях параметра B равны 4.

Итак, мы показали, что ответ есть 16/9.

□

Задача 4. (Источник: письменные вступительные экзамены МГУ, 1961–2015 г.г.)

Дан куб $ABCDA'B'C'D'$ с основанием $ABCD$ и боковыми рёбрами AA', BB', CC' и DD'. Точка M – середина ребра CC'. Через M проходит прямая, пересекающая прямые AD и BD' в точках P и Q. Найти длину отрезка PQ, если ребро куба равно 1.

Решение.

Эта задача является очень ярким примером того, что можно решить очень сложную стереометрическую задачу совершенно не имея «стереометрического воображения». Мы же будем использовать только несколько формул аналитической геометрии и несколько вариантов алгоритмов их построения. И, как и ранее в подобных случаях, решаем задачу без чертежа! (А где именно надо располагать на чертеже точки P, Q и M? на соответствующих отрезках или вне? если вне, то с какой именно стороны? По видимому, любое «стереометрическое» решение этой задачи должно включать предварительные ответы на все эти вопросы.)

Итак, расставим координаты вершин куба. В этой задаче, по-видимому, никакой из вершин нельзя «отдать предпочтения», Поэтому координаты расставляем любым корректным способом – т.е. следя за тем, чтобы точки A, B, C и D *в указанном порядке* образовывали квадрат. Заодно проставляем координаты точки M – полусумму координат точек C и C'. Итак,

	A	B	C	D	A'	B'	C'	D'	M
x	0	0	0	0	1	1	1	1	$\frac{1}{2}$
y	0	0	1	1	0	0	1	1	1
z	0	1	1	0	0	1	1	0	1

Для решения этой задачи мы впервые рассматриваем *параметрическое задание прямой в пространстве*; отметим по этому поводу, что формула двумерного случая на трёхмерный здесь не обобщается[5]. Опишем *алгоритм* построения этой формулы *в общем случае*, для некоторых точек (x_1, y_1, z_1) и (x_2, y_2, z_2). Сразу отметим, что на практике индексированные x, y и z обычно (но не всегда!) являются константами.

- Во-первых, выписываем координаты одной (любой) точки. Пусть координаты первой таковы:
$$x_1 \quad y_1 \quad z_1. \tag{1}$$
(Правильней была бы следующая запись:
$$(x_1, y_1, z_1). \tag{2}$$
Однако мы для удобства чтения пишем (1) – имея при этом в виду (2). Также будем поступать и далее, это не приведёт к проблемам.)
- Во-вторых, «делаем добавку» к каждой координате – так, чтобы из координат первой точки получились бы координаты второй; при этом для удобства дальнейших действий эти «добавки» пишем в скобках. Получаем такую запись координат второй точки:
$$x_1 + (x_2 - x_1) \quad y_1 + (y_2 - y_1) \quad z_1 + (z_2 - z_1).$$
- И в-третьих, умножаем каждую скобку на параметр (p); получаем:
$$x_1 + (x_2 - x_1)p \quad y_1 + (y_2 - y_1)p \quad z_1 + (z_2 - z_1)p. \tag{3}$$
Это и есть *параметрическая запись прямой*; в нашем случаен – в трёхмерном пространстве. Смысл параметра p – введение новой координаты (естественно, выражающейся через старые x, y и z); при этом, согласно нашим формулам, значение $p = 0$ соответствует первой точке, а значение $p = 1$ – второй[6].

---

[5] Точнее, обобщением формулы уравнения прямой в плоскости на трёхмерный случай является уравнение плоскости в пространстве.

[6] Говоря неформально, мы «измеряем удава в попугаях». Здесь «удав» соответствует прямой, проходящей через две заданные точки (точнее – любой точке этой прямой), а «попугай» – это отрезок с концами в тех же заданных точках.

Друая возможная аналогия – «движение паровозика» по прямой, причём в момент времени 0 (соответствующий значению параметра $p = 0$) он («паровозик») находится

Вернёмся к нашей задаче. В ней мы применяем эту формулу для двух прямых – AD и BD'. Отметим, что одна из самых распространённых ошибок в подобных случаях – применение одного и того же параметра для двух разных прямых[7]. Получаем следующую «полную» запись:

$$\begin{array}{cccc} & 0+(0-0)p & 0+(1-0)p & 0+(0-0)p \\ \text{и} & 0+(1-0)q & 0+(1-0)q & 1+(0-1)q \end{array}$$

(параметр для прямой AD мы назвали p, а для прямой BD' – q), или, после естественных упрощений,

$$0 \qquad p \qquad 0 \qquad\qquad \text{и} \qquad\qquad q \qquad q \qquad 1-q \tag{4}$$

(как и ранее, скобки и запятые опускаем).

Итак, уравнения прямых мы выписали. Но как узнать, где именно находятся точки P и Q этих прямых? Оказывается, мы можем считать, что мы *уже* это знаем. Для этого воспользуемся следующим «лингвистическим» пояснением.

В русском языке, как известно, нет артиклей – что создаёт неудобства не только для иностранцев, но и (иногда) для самих носителей языка[8]. Однако в нашем случае этот минус превращается в плюс! Мы можем *двумя разными способами* трактовать параметр p в формуле (3): в случае неизвестного значения («с неопределённым артиклем *a*») мы получаем *уравнение* прямой, а в случае конкретного значения («с определённым артиклем *the*») – конкретную её точку.

Вернёмся к нашей задаче. Мы можем считать, что в формулах (4) «стоят неопределённые артикли» – значит, эти же формулы являются одновременно координатами точек P и Q соответственно. (А чему равны значения параметров p и q? Мы этого пока не знаем – но это не помешает дальнейшему решению задачи.) А раз мы «знаем» координаты точек P и Q – то пора проводить прямую PQ; мы при этом употребляем ту же самую формулу (3), но, конечно же, с новым параметром (r).[9] Получаем следующую «полную» запись:

$$0+(q-0)r \quad p+(q-p)r \quad 0+((1-q)-0)r,$$

в первой точке, а в момент времени 1 (соответствующий значению параметра $p=1$ – во второй). При этом, например, значения параметра $0 \le p \le 1$ соответствуют отрезку с концами в этих двух точках, и т.д.

[7] Мы же вводим две разные новые координаты, пользуясь приведённой выше аналогией – «измеряем разных удавов в разных попугаях»; поэтому и параметры должны быть различными.

[8] Ведь отсутствие артикля может быть воспринято по-разному – как наличие определённого, либо как наличие неопределённого... Лингвисты отмечают, что часто в подобных случаях сразу не понимают друг друга представители разных русских диалектических групп.

[9] Отметим ещё по этому поводу, что здесь у нас возникает ситуация, когда координаты x_1, y_1 и z_1 в формуле (3) *не* являются константами.

или, упрощая,

$$qr \quad p+(q-p)r \quad (1-q)r. \tag{5}$$

Далее применяем те же самые пояснения, что и ранее – трактуем последнюю запись одновременно и как прямую PQ, и как любую точку этой прямой. M – одна из таких точек; таким образом, мы знаем два разных варианта записи её трёх координат, и на основе (5) получаем требуемые три уравнения с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} qr = \frac{1}{2} \\ p+(q-p)r = 1 \\ (1-q)r = 1. \end{cases}$$

Отметим, что данная система уравнений не является линейной – и в общем случае для решения нелинейных систем требуется некоторое искусство, часто даже «олимпиадное мышление»; но ведь мы собираемся решать задачи без него! Однако в нашем случае всё делается просто, достаточно подставить во второе и третье уравнения известное нам значение pq (из первого); получаем:

$$\begin{cases} qr = \frac{1}{2} \\ p-pr = \frac{1}{2} \\ r = \frac{3}{2}, \end{cases}$$

отсюда $p=-1$, $q=\frac{1}{3}$.[10]

Остальное совсем просто. Из (4) получаем координаты точек P и Q:

$$P(0,-1,0) \quad \text{и} \quad Q\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right),$$

откуда по формуле расстояния между двумя точками получаем

$$PQ = \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{4}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{7}{3}}$$

(ну или $\sqrt{21}/3$).

□

Задача 5. (Источник: `http://alexlarin.net/`, ОГЭ – 2015 г., вар. 60)

В окружность с центром O вписана трапеция $ABCD$, в которой сторона AB параллельна стороне CD, $AB=8$, $CD=3$, $\angle ABC = 60^o$. Точка K лежит на отрезке AB, причём $AK=2$. Прямая CK пересекает

[10] На основании этих значений можно заключить, что точка P находится вне соответствующего отрезка прямой (причём ближе к точке A), а точка Q – внутри «своего» отрезка. Но можно ли это понять сразу, не имея хорошего стереометрического воображения?

окружность в точке F, отличной от C. Найдите площадь треугольника OFC.

Решение.

Задача планиметрическая – но она существенно сложнее некоторых из рассмотренных далее стереометрических. По-видимому, она допускает и какое-либо решение, *не связанное с методом координат*, – однако приведённое здесь решение методом аналитической геометрии, как и ранее, *практически не требует размышлений*: необходимо «только» аккуратное использование нескольких приёмов. Среди уже рассмотренных нами приёмов – параметрическое задание прямой; здесь без него в принципе можно обойтись – но оно облегчает решение (а в некоторых других задачах такое задание просто необходимо).

Разместим точки – и отметим такие обстоятельства. Во-первых, трапеция вписана в окружность – и поэтому симметрична относительно прямой, проходящей через центры оснований (это очевидно?). Поэтому мы расположим эти центры на оси OY. Во-вторых, переменных две – при применённом нами расположении точек это y-координаты двух оснований, причём из геометрических соображений большее основание лежит ближе к началу координат. Однако мы не знаем, лежат ли оба основания с одной и той же стороны от начала координат, – но, как и обычно в подобных ситуациях[11], нам нет небходимости знать это при размещении точек: подобные вопросы обычно «проясняются» в процессе решения.

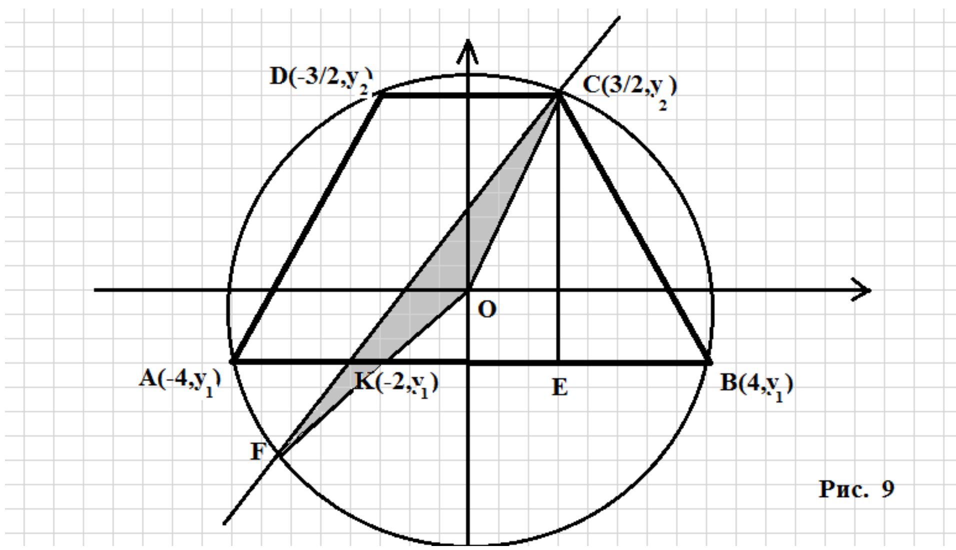


Рис. 9

Итак, сначала расставим вершины трапеции (рис. 9; отметим, что при этом можно было бы даже не рисовать окружность); y_1 и y_2 являются

[11] Напомним, что единственное исключение, которое мы сделали *специально*, – это задача 1.

упомянутыми нами переменными:

$$A\big(-4, y_1\big), \quad B\big(4, y_1\big), \quad C\left(\frac{3}{2}, y_2\right), \quad D\left(\frac{3}{2}, y_2\right), \quad K\big(-2, y_1\big).$$

Как обычно, для имеющихся 2 переменных необходимы 2 уравнения[12]. Здесь они очевидны:

- Во-первых – равенство расстояний до начала координат от двух «принципиально разных» вершин трапеции, скажем B и C. Удобнее, конечно, рассматривать квадраты расстояний – т.е.

$$4^2 + y_1^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 + y_2^2.$$

- Во-вторых, в прямоугольном треугольнике CEB (E – построенная нами проекция точки C на отрезок AB) угол $\angle B$ по условию задачи равен 60^o, поэтому меньший катет BE равен половине гипотенузы BC. То есть (снова употребляем квадраты расстояний, соотносящиеся как $4:1$)

$$4 \cdot \left(4 - \frac{3}{2}\right)^2 = \left(4 - \frac{3}{2}\right)^2 + (y_2 - y_1)^2.$$

(Заметим, что мы пока нигде не пользовались зна́ком значения y_2 – мы пока допускаем, что это значение может быть и отрицательным. Также отметим использованную нами длину CE как $y_2 - y_1$ – при сделанных нами обозначениях ошибкой являлось бы значение $y_2 + y_1$.)

После несложных преобразований получим систему:

$$\begin{cases} y_2^2 - y_1^2 = \frac{55}{4} \\ (y_2 - y_1)^2 = \frac{75}{4}. \end{cases}$$

Конечно, решить её не так сложно – однако, по-видимому, мы сильнее всего упростим задачу сведе́нием квадратных уравнений к линейным; это может быть сделано, *например*, путём деления второго уравнения на первое:

$$\frac{y_2 - y_1}{y_2 + y_1} = \frac{15}{11},$$

откуда $y_2 = -\frac{13}{2} y_1$ (и мы отсюда видим, что основания трапеции лежат с разых сторон от оси OX, т.е. наш рисунок «полностью отражает реальность»). Подставляя это значение во второе уравнение системы и учитывая, что $y_2 > y_1$, получаем

$$y_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \quad y_2 = \frac{13}{2\sqrt{3}}.$$

Таким образом, мы *расставили координаты точек* – всех, кроме F.

[12] Кстати, одно из редких исключеий у нас уже было – задача 3.

Уравнение прямой CK (нужное нам для нахождения координат точки F; заметим, забегая вперёд, что они нам не понадобятся!) мы, как и в предыдущей задаче, запишем параметрически. «Нулевой момент времени» – точка C, с неё и начинаем. Изменение координат до «первого момента времени»: по x равно $-2-\frac{3}{2}=-\frac{7}{2}$, по y равно $y_1-y_2=-\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{13}{2\sqrt{3}}=-\frac{15}{2\sqrt{3}}$, т.е. параметрическая запись прямой такова:

$$\frac{3}{2}-\frac{7}{2}\,p \qquad \frac{13}{2\sqrt{3}}-\frac{15}{2\sqrt{3}}\,p \tag{6}$$

(мы, как и ранее, опускаем скобки и запятые).

Любая точка этой прямой определяется этой парой координат (при некотором p) – в том числе и искомая F. Значит, подставляя пару координат (6) в несложное уравнение окружности, мы должны получить два решения – соответствующие точкам C и F. При этом *заранее* понятно, что (как раз в связи с наличием решения-C) квадратное уравнение сразу «превращается» в линейное. Итак,

$$\left(\frac{3}{2}-\frac{7}{2}\,p\right)^2+\left(\frac{13}{2\sqrt{3}}-\frac{15}{2\sqrt{3}}\,p\right)^2=4^2+y_1^2\,.$$

Для практических вопросов *(для экономии времени на экзамене!)* важно вот что: как уже сказано выше, это уравнение *должно* иметь корень $p=0$ – поэтому в последнем уравнении можно игнорировать те вычисления, в результате которых получаются свободные члены (т.е. *не* коэффициенты при p и p^2). Итак,

$$\left(\left(\frac{7}{2}\right)^2+\left(\frac{15}{2\sqrt{3}}\right)^2\right)p^2-2\left(\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{7}{2}\right)+\left(\frac{13}{2\sqrt{3}}\right)\left(\frac{15}{2\sqrt{3}}\right)\right)p+A=A$$

(константой A, *не вычисляемой нами*, мы обозначили сумму свободных членов в левой и правой частях). Последнее уравнение (для не равных нулю корней) равносильно следующему:

$$\left(\left(\frac{7}{2}\right)^2+\left(\frac{15}{2\sqrt{3}}\right)^2\right)p=2\left(\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{7}{2}\right)+\left(\frac{13}{2\sqrt{3}}\right)\left(\frac{15}{2\sqrt{3}}\right)\right),$$

что после несложных вычислений даёт $p=\frac{43}{31}$.

Теперь – ещё одна возможность сильно упростить вычисления: нам, на самом деле, для ответа на вопрос задачи не нужны координаты точки F – а нужна только длина отрезка CF. При уже известном нам значении $p=\frac{43}{31}$ её (длину) можно леко вычислить на основе (6): изменение координаты идёт по значению p. Получаем

$$\sqrt{\left(\frac{7}{2}\right)^2+\left(\frac{15}{2\sqrt{3}}\right)^2}\cdot\frac{43}{31}=\frac{43}{\sqrt{31}}.$$

Для вычисления площади основания применим формулу Герона[13]. У нас одна сторона, как мы только что посчитали, равна $c = \frac{43}{\sqrt{31}}$, а обе остальные равны радиусу, т.е.

$$a = \sqrt{16 + \frac{1}{3}} = \frac{7}{\sqrt{3}}.$$

Отсюда (p, как всегда, полупериметр)

$$S^2 = (p-a)^2 \cdot p \cdot (p-c) = \frac{c^2}{4} \cdot \left(a + \frac{c}{2}\right) \cdot \left(a - \frac{c}{2}\right);$$

получаем, что

$$\left(a + \frac{c}{2}\right) \cdot \left(a - \frac{c}{2}\right) = a^2 - \frac{c^2}{4} = \frac{49}{3} - \frac{43^2}{31 \cdot 4} = \frac{23^2}{3 \cdot 4 \cdot 31},$$

отсюда

$$S = \frac{43}{2 \cdot \sqrt{31}} \cdot \frac{23}{2 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{31}} = \frac{989}{124\sqrt{3}}.$$

(В заключение отметим, что сами вычисления не являются слишком сложными, и – при описанных выше небольших «хитростях» – выполняются минут за 10–15.)

□

Задача 6. (Источник: письменные вступительные экзамены МГУ, 1961–2015 г.г.)

В основании треугольной пирамиды $MNGH$ лежит треугольник MGH со сторонами $MG = 2\sqrt{\frac{10}{3}}$, $MH = \frac{8}{\sqrt{3}}$, $GH = 4$. Известно также, что $MN = \frac{8}{\sqrt{3}}$, $NH = NG = 4$. Найти радиус шара, описанного около пирамиды $MNGH$.

Решение.

Это – одна из тех задач, которые на самом деле несложны, но «пугают» абитуриентов наличием трёх измерений. Однако для решения этой задачи достаточно знать всего одну формулу – формулу расстояния между двумя точками – а эта формула, как мы уже отечали, в трёхмерном случае не сложнее, чем в двумерном.

Определим (возможные) координаты вершин пирамиды. Для этого сначала заметим, что в нашей задаче специально запутано условие: ведь основанием треугольной пирамиды мы можем считать любую её грань, и в

[13] «Не так страшен чёрт, как его малюют». В реальных задачах практически всегда *реальные* вычисления по формуле Герона не очень сложны! Особенно в такой задаче, как эта: треугольни равнобедренный.

данном случае значительно удобнее считать им треугольник NHG, являющийся равносторонним. Поскольку высота равностороннего треугольника со стороной 4 равна $2\sqrt{3}$, возможен следующий вариант расположения наших точек.

	N	H	G	M	O
x	2	-2	0	0	0
y	0	0	$2\sqrt{3}$	y_M	y_O
z	0	0	0	z_M	z_O

(И ещё некоторые комментарии. Мы включили в таблицу координат также точки M и O, последнюю будем считать центром искомого описанного шара. При этом из соображений симметрии – а именно для возможности её применения мы не стали помещать ни одну из вершин в начало координат – заключаем, что x-координаты обеих точек равны 0. А y- и z-координаты этих точек мы пока не знаем – см. их обозначение в таблице.)

Найдём неизвестные координаты, начинать мы должны с точки M. Поскольку нам неизвестны две координаты, мы должны выписать для них два уравнения. Как всегда в подобных случаях, для MN и MH уравнения получаются одинаковые (отсюда и симметрия), значит, нужна пара уравнений для расстояний MN и MG. Также, как практически всегда в подобных случаях, удобнее выписывать уравнения сразу для квадратов этих расстояний. По формуле расстояния между двумя точками (другими словами – в результате двукратного применения теоремы Пифагора) получаем

$$\begin{cases} \frac{64}{3} = MN^2 = 4 + y_M^2 + z_M^2 \\ \frac{40}{3} = MG^2 = (y_M - 2\sqrt{3})^2 + z_M^2. \end{cases}$$

Вычитая из одного уравнения другое, сразу получаем $y_M = \frac{4}{\sqrt{3}}$, после чего находим $z_M = 2\sqrt{3}$.

Для координат точки O также нужны два уравнения (ведь неизвестны также две координаты) – однако мы, в отличие от предыдущего случая, не знаем ни одного расстояния; что же делать? Аналогично предыдущей задаче, воспользуемся условием *равенства неизвестных расстояний*. Во-первых – $OG = OM$, или, удобнее, $OG^2 = OM^2$; получаем

$$\left(y_O - 2\sqrt{3}\right)^2 + z_O^2 = OG^2 \ = \ OM^2 = \left(y_O - \frac{4}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(z_O - 2\sqrt{3}\right)^2,$$

откуда после приведения подобных слагаемых и других несложных преобразований получаем

$$y_0 = 3z_0 - \frac{4}{\sqrt{3}}.$$

Во-вторых – $ON^2 = OG^2$, т.е.

$$4 + y_O^2 + z_O^2 = ON^2 \ = \ OG^2 = \left(y_O - 2\sqrt{3}\right)^2 + z_O^2.$$

После преобразований, учитывая предыдущее уравнение, получаем

$$y_0 = z_0 = \frac{2}{\sqrt{3}},$$

откуда квадрат радиуса равен

$$4 + \frac{4}{3} + \frac{4}{3} = \frac{20}{3},$$

а радиус равен $2\sqrt{\frac{5}{3}}$.

$\square$

Задача 7. (Источник: письменные вступительные экзамены МГУ, 1961–2015 г.г.)

В прямоугольном параллелепипеде с боковыми рёбрами AA', BB', CC', DD' и основанием $ABCD$ известны стороны $AB = 2$, $BC = 1$, $AA' = \sqrt{3}$. E – середина ребра BB'. Найти объём пирамиды $AD'EC$.

Решение.

Задача проще предыдущей – однако требует знания одной формулы, не входящей в школьную программу. Но по порядку. Можно догадаться, что знания всех четырёх координат рассматриваемой пирамиды достаточно для вычисления её объёма – достаточно с одним «но»: для вычисления объёма пирамиды мы должны знать её высоту – т.е., другими словами, расстояние от заданной точки до заданной плоскости.

> Рассмотрим эту формулу *без вывода* – формулу расстояния от точки (x_0, y_0, z_0) до плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$; это расстояние есть
>
> $$\frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$
>
> Эту громоздкую формулу на самом деле запомнить совсем несложно: мы подставляем координаты «нашей» точки (вообще говоря, плоскости не принадлежащей) в уравнение «чужой» плоскости (понятно, почему получается 0, если «наша» точка всё же лежит в плоскости); далее берём модуль и делим на стандартный нормирующий множитель (в студенческих курсах этот множитель будет использоваться и в некоторых других формулах). Заметим ещё, что данная формула является очевидным обобщением соответствующей формулы в двумерном случае.

Расставим координаты вершин параллелепипеда и точки E – это не намного сложнее, чем в предыдущей задаче; по сравнению с ней мы просто заменяем 1 в каждой из координат на соответствующие (заданные) дли́ны.

	A	B	C	D	A'	B'	C'	D'	E
x	0	0	0	0	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
y	0	0	1	1	0	0	1	1	0
z	0	2	2	0	0	2	2	0	2

Отметим, что как и в предыдущей задаче, у нас нет оснований *не* совмещать начало кординат с одной из вершин – значит, как обычно в подобных случаях, это надо сделать. Кстати, такое совмещение начала координат с точкой A, через которую мы будем проводить плоскость, упростит некоторые вычисления – см. ниже.

Выберем основание пирамиды – т.е. просто три точки из четырёх её вершин. Пусть основанием является треугольник ACD'. Для вычисления площади основания снова применим формулу Герона. По формуле расстояния между двумя точками, заданными своими координатами, получаем

$$AC = \sqrt{5}, \quad CD' = \sqrt{7}, \quad AD' = 2.$$

Поэтому полупериметр треугольника ACD' есть $\frac{\sqrt{5}+\sqrt{7}}{2}+1$, а квадрат площади основания S^2 равен

$$\left(\frac{\sqrt{5}+\sqrt{7}}{2}+1\right)\left(\frac{\sqrt{5}+\sqrt{7}}{2}-1\right)\left(\frac{\sqrt{5}}{2}+1-\frac{\sqrt{7}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{7}}{2}+1-\frac{\sqrt{5}}{2}\right).$$

Теперь – некоторые практические (технические) вопросы применения формулы Герона. При любой группировке в пары скобок последней формулы (точнее – формулы Герона вообще) мы в каждой из этих пар получаем правую часть формулы разности квадратов[14] – надо только каждый раз определять, каких именно квадратов. Например, сгруппируем в пары первые две и последние две скобки. В первом случае ответ на вопрос «каких именно квадратов» очевиден; во втором же случае *нужно* догадаться, что ими являются 1 («квадрат-уменьшаемое») и $\frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{2}$ («квадрат-вычитаемое»). После записи в виде разности квадратов и несложных преобразований получаем

$$S^2 = \left(\frac{\sqrt{35}}{2}+2\right)\left(\frac{\sqrt{35}}{2}-2\right)$$

(снова разность квадратов! отметим, что так получается всегда), отсюда $S = \frac{\sqrt{19}}{4}$.

[14] Нужно уметь находить возможность применения формул не только «слева направо», но и «справа налево».

Итак, нам нужно провести плоскость через точки A, C и D' – т.е., как обычно в аналитической геометрии, надо просто выписать её формулу. Вряд ли у нас возникнет недоразумение по поводу того, что заглавные буквы от A до D обозначают и точки, и коэффициенты плоскости – из контекста всегда понятно, что именно имеется в виду; значительно более важно следующее обстоятельство. У нас есть три точки (и из «обычной», «неаналитической» стереометрии мы знаем, что именно такого числа точек, не лежащих на одной прямой, необходимо и достаточно для проведения через них плоскости) – а неизвестных – четыре... кто виноват? что делать?

Ответы на последние вопросы таковы. «Кто виноват?» Если *бы* мы были твёрдо уверены в том, что некоторый (причём *заранее* известно, какой) коэффициент отличен от 0 – то мы могли бы просто разделить уравнение плоскости на этот коэффициент – при этом действительно получается уравнение с 3 неизвестными[15]. Но у нас такой уверенности нет – вот и приходится работать с «лишним» коэффициентом. «Что делать?» Никогда[16] не обращать внимания на то, что неизвестных «много» – хуже, когда их «мало». Надо просто решать систему – и в некоторый момент заменить любой не равный 0 коэффициент на произвольно выбранное число. Отметим ещё, что такую замену часто сто́ит делать так, чтобы при этом получались «хорошие» числа, удобные для дальнейшей работы.

Теперь пора проводить плоскость. Подставим в «абстрактное» уравнение плоскости $Ax+By+Cz+D=0$ координаты точек A, C и D' – получаем соответственно

$$\begin{cases} D=0 \\ B+2C+D=0 \\ \sqrt{3}A+B+D=0. \end{cases}$$

Выберем $C=1$, тогда $B=-2$, $A=\frac{2}{\sqrt{3}}$, уравнение искомой плоскости есть $\frac{2}{\sqrt{3}}x-2y+z=0$. Расстояние до неё от точки E (согласно приведённой выше формуле) равно

$$\frac{\frac{2}{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{3}}{2}+2}{\sqrt{\frac{4}{3}+4+1}}=3\sqrt{\frac{3}{19}},$$

а объём пирамиды равен $\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{19}}{4}\cdot 3\sqrt{\frac{3}{19}}=\frac{\sqrt{3}}{4}$.

□

[15] В школьном курсе мы фактически делаем так с уравнением прямой – однако при этом приходится запрещать прямые, параллельные оси OY. «Там» мы «утешаем себя тем», что все прямые, *являющиеся графиками функций,* мы умеем описывать и таким, упрощённым способом, – но ведь «здесь» нам надо уметь описать любую плоскость!

[16] Причём не только при проведении плоскости, но и в таких случаях вообще, например, в будущем студенческом курсе аналитической геометрии.

Задача 8. (Источник: письменные вступительные экзамены МГУ, 1961–2015 г.г.)

В основании треугольной пирамиды $NKLM$ лежит правильный треугольник KLM. Высота пирамиды, опущенная из вершины N, проходит через середину ребра LM. Известно, что $KL = a$, $KN = b$. Пирамиду пересекает плоскость β, параллельная рёбрам KN и LM. На каком расстоянии от вершины N должна находиться плоскость β, чтобы площадь сечения пирамиды этой плоскостью была наибольшей?

Решение.

Из условия задачи получаем перпендикулярность отрезкоы OK и ON (где O – середина ребра LM) – и, следовательно, удачный вариант расположения вершин: начало координат находится в точке O, вершины L и M лежат на оси OX, а вершины K и N – но осях OY и OZ соответственно. И, «наступая на горло собственной песне», приведём рисунок. На нём (рис. 10) даны плоскости OXY и OXZ и их сечения плоскостью β – отрезки PP' и QQ'.

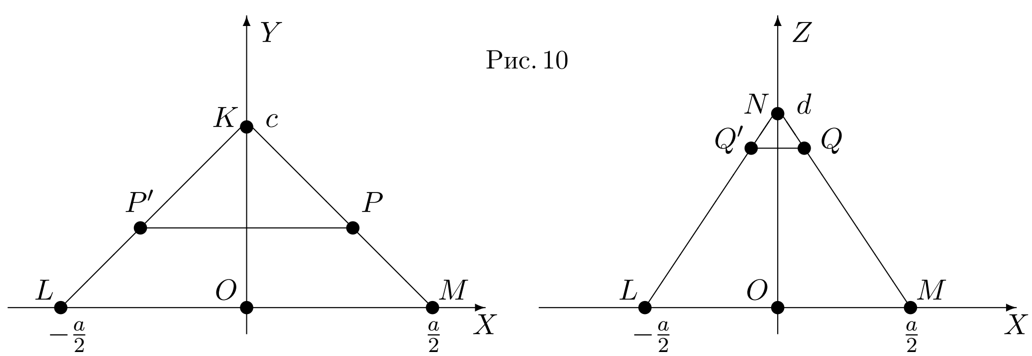


Рис. 10

Некоторые комментарии к рисунку. Координаты точек K и N обозначены как c и d, они могут быть вычислены как функции, зависящие от параметров a и b, – однако для упрощения дальнейших формул мы пока не будем этого делать[17]. Мы также пока не будем вычислять координаты точек P и Q – отметим только, что для их вычисления необходимы некоторые дополнительные параметры.

Именно площадь четырёхугольника $PP'Q'Q$ (очевидно, что он является трапецией[18]) должна быть максимизирована в данной задаче.

Итак, сначала выпишем координаты вершин пирамиды.

---

[17] Ниже мы приведём и другие плюсы того, что c и d *не* вычисляются сейчас. Отметим однако, что этот момент не очень принципиальный – хотя, как уже было сказано, формулы немного упрощаются.

[18] Более того, решив задачу до конца, мы узнаем, что *искомый* четырёхугольник $PP'Q'Q$ окажется прямоугольником. По этому поводу сделаем два важных замечания.

	L	M	K	N
x	$-\frac{a}{2}$	$\frac{a}{2}$	0	0
y	0	0	c	0
z	0	0	0	d

Следующей нашей задачей является построение множества плоскостей, параллельных искомой плоскости β. Как и в предыдущих задачах, мы имеем в виду построение формулы, описывающей все такие плоскости; очевидно, что эта формула должна иметь ровно один параметр. Одной из таких плоскостей является плоскость, параллельная оси OX (поскольку именно на ней лежит отрезок LM) и проходящая через точки K и N. [19]

Для её проведения применим несложный, но важный приём, иногда облегчающий построения: параллельность оси OX – это, другими словами, *независимость* уравнения от переменной x, т.е. обычное уравнение плоскости $Ax+By+Cz+D=0$ упрощается и записывется как $By+Cz+D=0$. Дальнейшие действия мы уже проводили в предыдущих задачах: подставив в последнее уравнение координаты точек K и N, мы получаем систему

$$\begin{cases} Bc+D=0 \\ Cd+D=0. \end{cases}$$

Удачная запись её решения – уравнение $dy+cz-cd=0$.

Ещё один совсем несложный, но важный приём: мы можем считать, что уравнения *всех* параллельных между собой прямых содержат одинаковые коэффициенты при x, y и z и отличаются одна от другой свободным членом. Поэтому введём уже упомянутый нами параметр (пусть p) и запишем

Во-первых, «методологическое» замечание. Обычно в школьных учебниках геометрии прямоугольник (и параллелограмм вообще) почему-то *не считается частным случаем трапеции*. Вряд ли это может хоть немного затруднить *решение* какой-либо задачи подготовленными школьниками (которые понимают, что все формулы для трапеции верны и для параллелограмма) – однако может затруднить *оформление* решения.

Во-вторых, замечание для читателей с «олимпиадным» типом мышления. Можно ли *уже сейчас* как-нибудь узнать, *догадаться*, что искомой фигурой будет прямоугольник? И если можно – то как этим *воспользоваться* для упрощения решения? У автора нет ответов на эти вопросы. Однако важно отметить, что наша цель – вовсе не решение задач «олимпиадным» путём. Мы хотим научить читателей некоторым *стандартным приёмам*, при употреблении которых задача решается со значительно большей вероятностью.

[19] «С точки зрения “обычной” геометрии» очевидно, что такая плоскость определяется однозначно. А вот что происходит «с точки зрения аналитической геометрии». На уравнение плоскости $Ax+By+Cz+D=0$, содержащее, как было отмечено выше, не 4, а 3 «степени свободы», накладываются 3 ограничения: параллельна прямой LM; содержит точку K; содержит точку N. Каждое из этих ограничений «снимает одну степень свободы» – поэтому в результате плоскость определяется однозначно.

уравнения этих плоскостей в виде

$$dy + cz + p = 0. \tag{7}$$

Заметим, что, в отличие от предыдущих параметров, $p < 0$. И, аналогично задаче 4, мы считаем, что (7) является также *само́й* плоскостью β – при некотором конкретном значении параметра p. [20]

Теперь план дальнейших построений должен быть понятен: мы записываем координаты точек P (P') и Q (Q') как функции от этого параметра p, и также как функцию от этого параметра выражаем площадь трапеции. (Напомним, что a, b, c и d мы рассматриваем как константы.)

Начнём с точки Q. Она является пересечением прямых MN и QQ' – найдём их уравнения (в плоскости OXZ). Прямую MN построить проще – выше мы уже делали не раз, поэтому приведём только результат: $2dx+az-ad = 0$. А для построения прямой QQ' мы используем ещё один приём – как и предыдущие в этом решении, он несложный, но важный: прямая QQ' является пересечением плоскости β и плоскости OXZ, y-координаты всех точек плоскости OXZ равны 0, поэтому уравнение прямой QQ' получается из уравнения (7) путём подстановки в последнее $y = 0$; получаем $cz+p = 0$. Итак, для получения x- и z-координат точки Q надо решить систему

$$\begin{cases} 2dx + az - ad = 0 \\ cz + p = 0; \end{cases}$$

получаем

$$x = \frac{acd + ap}{2cd}, \quad z = -\frac{p}{c}.$$

Совершенно аналогично мы получаем x- и y-координат точки P. [21] Выпишем координаты найденных четырёх точек:

	P	P'	Q	Q'
x	$\frac{acd+ap}{2cd}$	$\frac{acd+ap}{2cd}$	$\frac{acd+ap}{2cd}$	$\frac{acd+ap}{2cd}$
y	$-p/d$	p/d	0	0
z	0	0	$-p/c$	p/c

Теперь уже понятно, что сечение является прямоугольником. Напомним также, что $p < 0$. Границы изменения p (нам они будут нужны для поиска максимума площади сечения) фактически уже были найдены:

$$-cd < p < 0\,, \tag{8}$$

поскольку при $p = 0$ соответствующая плоскость проходит через начало координат, а при $p = -cd$ – через точки K и N.

[20] По терминологии задачи 4 – «с определённым артиклем».

[21] Возможность применить такую аналогию – ещё один плюс того, что мы до сих пор не посчитали значения c и d.

Найдём площадь сечения. Одна из сторон (например, PP') равна $\frac{acd+ap}{cd}$. По формуле расстояния между двумя точками найдём другую сторону (например, PQ); она равна

$$\sqrt{\left(\frac{p}{c}\right)^2+\left(\frac{p}{d}\right)^2}=-\frac{p}{\sqrt{c^2+d^2}}.$$

Таким образом, площадь сечения есть

$$S(p) \;=\; -\frac{a}{cd\sqrt{c^2+d^2}}\,\left(p^2+cdp\right).$$

Функция $S(p)$ достигает максимума[22] в точке $p=-\frac{cd}{2}$, которая входит в найденный выше интервал (8). Таким образом, значение $p=-\frac{cd}{2}$ соответствует искомой плоскости β.

Остаётся техническая работа. На основе формулы (7) получаем уравнение плоскости β: $dy+cz-\frac{cd}{2}=0$. Ранее мы уже использовали формулу расстояния от точки до плоскости; применив её для плоскости β и точки $N\,(0,0,d)$, получаем

$$\frac{|cd-\frac{cd}{2}|}{\sqrt{c^2+d^2}}=\frac{cd}{2\sqrt{c^2+d^2}}. \tag{9}$$

Теперь, наконец, надо подставить в последнюю формулу выражение параметров c и d через параметры a и b – что несложно сделать, используя рис. 10. Треугольник KLM правильный – поэтому $c=\frac{a\sqrt{3}}{2}$. По условию $KN=b$, откуда получаем уравнение $c^2+d^2=b^2$ – т.е. знаменатель выражения (9) мы знаем. Далее, $\frac{3a^2}{4}+d^2=b^2$, поэтому $d=\sqrt{b^2-\frac{3a^2}{4}}$, и после преобразований и небольших упрощений мы получаем искомое расстояние:

$$\frac{a\sqrt{12b^2-9a^2}}{8b}.$$

□

А в следующх двух задачах мы научимся *несложно* делать то, что, повидимому, считается самым сложным в школьных стереометрических задачах – вычислять расстояние между скрещивающимися прямыми. При этом мы *не* будем пользоваться никакими новыми формулами – только формулами из школьного курса! При этом, как и в предыдущей задаче, аналитическая геометрия даёт нам возможность применить (в нужное время) простейшие элеventы математичского анализа.

Задача 9. (Источник: `http://mathus.ru/math/dll.pdf`)

[22] При исследовании функции $S(p)$ нам также удобнее не считать значения c и d. Отметим также, что мы обошлись без дифференцирования функции $S(p)$ – но заранее не знали этого; если бы вид этой функции оказался сложнее – то пришлось бы дифференцирование применить.

В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ (с вершиной S) длина каждого ребра равна 4. Точка K – середина ребра SA. Найдите расстояние между прямыми AD и BK.

Решение.

Мы приведём решение, не имеющее ничего общего с приведённом на вышеуказанном сайте; наше решение существенно проще[23]. Сначала расставим точки основания («вокруг» начала координат):

$$A(-2,-2,0),\quad B(2,-2,0),\quad C(2,2,0),\quad D(-2,2,0).$$

Несложно вычисляется, что длина высоты равна $2\sqrt{2}$, поэтому

$$S\left(0,0,2\sqrt{2}\right);$$

далее

$$K\left(-1,-1,\sqrt{2}\right).$$

Теперь упомянутым выше способом запишем уравнения двух необходимых нам прямых:

$$AD:\quad (-2,-2+4p,0)\qquad \text{и} \qquad BK:\quad \left(2-3q,-2+q,\sqrt{2}q\right)$$

(как и ранее, используем параметрическую запись *с разными* параметрами).

Теперь воспользуемся определением расстояния между скрещивающимися прямыми из ученбика геометрии: это длина общего перпендикуляра, проведённого к этим прямым. Другое возможное определение (вытекающее из предыдущего) – это миниально возможное расстояние между *какими-либо* точками этих прямых; вот мы и выпишем это расстояние (ниже ρ) – точнее, квадрат расстояния – *как функцию от параметров p и q*:

$$(\rho(p,q))^2 = (4-3q)^2 + (4p-q)^2 + \left(\sqrt{2}q\right)^2.$$

Будем использовать очевидную запись

$$(\rho(p,q))^2 \to \min,$$

означающую (очевидно), что нам нужно найти минимум этой функции; отметим, что параметры p и q могут принимать любые значения. Это значение и будет равно искомому расстоянию между прямыми, а точки, соответствующие *найденным (оптимальным для нас) значениям p и q*, являются основаниями необходимого общего перпендикуляра.

[23] Сравните! И, забегая вперёд, отметим, что ещё сильнее простота нашего способа нахождения расстояния между двумя прямыми будет видна в следующей задаче.

В нашем случае[24] всё просто: параметр p входит только во «второй квадрат», поэтому для достижения минимума необходимо выпонение равенства $p = \frac{q}{4}$, что приводит к необходимости минимизации функции *одной* переменной:

$$(\rho(q))^2 = (4-3q)^2 + (\sqrt{2}q)^2 \to \min;$$

мы это делать умеем. После преобразований получаем

$$11q^2 - 24q + 16 \to \min,$$

что даёт $q = \frac{12}{11}$, и при этом $\rho = 4\sqrt{\frac{2}{11}}$.

$\square$

Задача 10. (Источник: письменные вступительные экзамены МГУ, 2015 г., `http://cpk.msu.ru/files/2015/math_solutions.pdf`)

В правильную треугольную пирамиду с основаниями ABC, $A'B'C'$ и рёбрами AA', BB', CC' вписана сфера. Найдите её радиус, если известно, что расстояние между прямыми AE и BD равно $\sqrt{13}$, где E и D – точки, лежащие на $A'B'$ и $B'C'$ соответственно, и $A'E : EB' = B'D : DC' = 1 : 2$.

Решение.

Сначала приведём «официальный вариант» решения, взятый с вышеупомянутого сайта (рис. 11). Это решение вызывает очень много вопросов (и претензий) – не будем их формулировать… (Если же только в двух словах – то «просто перемудрили»!)

Решение: Пусть $A'E : EB' = B'D : DC' = 1 : k$ (по условию $k = 2$). Обозначим через d расстояние между AE и BD (по условию $d = \sqrt{13}$). Обозначим также через F и F' середины рёбер AC и $A'C'$ соответственно. Опустим из точек E и D перпендикуляры EE' и DD' на ребро $A'C'$. По теореме Фалеса $A'E' : E'F' = F'D' : D'C' = 1 : k$. Следовательно, $E'D' = A'F' = AF$, то есть прямые AE' и FD' параллельны. Поскольку прямые EE' и DD' также параллельны, получаем, что плоскости $\alpha = AEE'$ и $\beta = BDD'F$ параллельны. Стало быть, расстояние между прямыми AE и BD равно расстоянию между плоскостями α и β. Но поскольку F — середина AC, расстояние между α и β равно расстоянию от C до β. Заметим, что перпендикуляр, опущенный из C на FD', по теореме о трёх перпендикулярах перпендикулярен BF. Стало быть, он перпендикулярен и всей плоскости β, то есть его длина равна d.

Рассмотрим треугольник FCK, где K — точка пересечения прямых CC' и FD'. Это прямоугольный треугольник с прямым углом C. При этом, если r — искомый радиус, то

$$FC = r\sqrt{3},\ CK = (k+1)CC' = 2(k+1)r,$$

откуда

$$d = \frac{FC \cdot CK}{\sqrt{FC^2 + CK^2}} = r \cdot \frac{2\sqrt{3}(k+1)}{\sqrt{3+4(k+1)^2}} = r \cdot \frac{6}{\sqrt{13}}.$$

Учитывая, что $d = \sqrt{13}$, получаем, что $r = 13/6$.

Ответ: 13/6

Рис. 11

[24] В отличие от следующей задачи!

А для более понятного решения (пусть и записываемого длиннее) мы сначала вычислим расстояние между нужными нам скрещивающимися прямыми (теми, которые в условии) *в том случае, когда длина стороны основания пирамиды* (т.е. стороны́ треугольника) равна $2\sqrt{3}$. При этом радиус вписанной окружности равен 1, следовательно расстояние между плоскостями оснований равно 2. Поэтому можно расположить точки следующим образом:

$$A\left(-\sqrt{3}, 0, -1\right) \quad A'\left(-\sqrt{3}, 0, 1\right)$$
$$B\left(\sqrt{3}, 0, -1\right) \quad B'\left(\sqrt{3}, 0, 1\right)$$
$$C\left(0, 3, -1\right) \quad C'\left(0, 3, 1\right).$$

Получаем точку E, деля отрезок $A'B'$ в отношении $1:2$:

$$E\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, 0, 1\right);$$

аналогично получаем точку D, деля отрезок $B'C'$ в отношении $1:2$:

$$D\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, 1, 1\right).$$

Далее – как в предыдущих задачах. Во-первых – прямая AE (стартуем от точки A, параметр p):

$$\left(-\sqrt{3} + \frac{2\sqrt{3}}{3}p, 0, -1 + 2p\right);$$

Во-вторых – прямая BD (стартуем от точки B, параметр q):

$$\left(\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{3}q, q, -1 + 2q\right).$$

Квадрат расстояния между *конкретными* точкой обеих прямых

$$\left(-2\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{3}(2p + q)\right)^2 + q^2 + (2p - 2q)^2;$$

это значение, как и в предыдущей задаче, мы и будем минимизировать по p и q – однако сама процедура минимизации будет сложнее.

Итак:

$$\frac{1}{3}(-6 + 2p + q)^2 + q^2 + 4(p - q)^2 \to \min,$$
$$(2p + q - 6)^2 + 3q^2 + 12(p^2 - 2pq + q^2) \to \min,$$
$$16p^2 - 20pq + 28q^2 - 24p - 12q + 36 \to \min,$$

или, что то же самое:

$$4p^2 - 5pq + 7q^2 - 6p - 3q \to \min .$$

Теперь самое интересное. Сначала считаем p параметром-*константой* (при этом относительно *переменной* q получается парабола с ветвями вверх) и дифферинцируем по q, после чего полученную производную приравниваем к 0:

$$-5p + 14q - 3 = 0,$$

откуда

$$q = \frac{5p+3}{14}$$

(в этой точке находится абсцисса минимума параболы относительно переменной q *при любом рассматриваемом* p). Подставляем это значение в минимизируемую функцию:

$$4p^2 - 5p\left(\frac{5p+3}{14}\right) + 7\left(\frac{5p+3}{14}\right)^2 - 6p - 3\left(\frac{5p+3}{14}\right) \to \min;$$

умножив на 14^2, получаем:

$$4\cdot 14^2p^2 - 5\cdot 14p(5p+3) + 7(5p+3)^2 - 6\cdot 14^2 p - 3\cdot 14(5p+3) \to \min,$$

$$784p^2 - 70(5p^2+3p) + 7(25p^2+30p+9) - 1176p - 42(5p+3) \to \min,$$

$$609p^2 - 1386p \to \min,$$

$$203p^2 - 462p \to \min,$$

$$29p^2 - 66p \to \min,$$

откуда получаем, что минимум достигается при

$$p = \frac{33}{29},$$

и при этом

$$q = \frac{5p+3}{14} = \frac{5(\frac{33}{29})+3}{14} = \frac{5\cdot 33 + 3\cdot 29}{14\cdot 29} = \frac{3\cdot 84}{14\cdot 29} = \frac{3\cdot 6}{29} = \frac{18}{29}.$$

Отсюда

$$2p + q - 6 = \frac{2\cdot 33 + 18 - 6\cdot 29}{29} = -\frac{90}{29},$$

$$p - q = \frac{15}{29},$$

и, подставляя в значение квадрата расстояния, получаем

$$\frac{1}{3}(-6+2p+q)^2 + q^2 + 4(p-q)^2 = \frac{1}{3}\left(\frac{90}{29}\right)^2 + \left(\frac{18}{29}\right)^2 + 4\left(\frac{15}{29}\right)^2 =$$

$$\frac{3\cdot 30^2 + 18^2 + 4\cdot 15^2}{29^2} = \frac{4(3\cdot 15^2 + 9^2 + 15^2)}{29^2} = \frac{4\cdot 9(3\cdot 5^2 + 9 + 5^2)}{29^2},$$

поэтому само минимальное расстояние есть

$$\frac{6}{29}\sqrt{109}.$$

Итак, при расстоянии $\frac{6}{29}\sqrt{109}$ получаем радиус 1, поэтому при расстоянии $\sqrt{13}$ должен быть радиус

$$\frac{29\sqrt{13}}{6\sqrt{109}}.$$

$\square$

Пока всё...