Московский Государственный Университет имени М. В. Ломоносова

Дополнительное вступительное испытание по математике

июль 2018 года

ОТВЕТЫ И ОБРАЗЦЫ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧ

Задача 1.

Какое из чисел $\frac{49}{18}$ и $\frac{79}{24}$ ближе к 3?

Ответ: Первое

Какое из чисел $\frac{49}{32}$ и $\frac{59}{24}$ ближе к 2?

Ответ: Второе

Какое из чисел $\frac{55}{21}$ и $\frac{95}{28}$ ближе к 3?

Ответ: Первое

Какое из чисел $\frac{53}{36}$ и $\frac{68}{27}$ ближе к 2?

Ответ: Второе

Задача 2.

Найдите все значения параметра a, при которых разность между корнями уравнения $x^2+3ax+a^4=0$ максимальна.

Ответ: $a=\pm\frac{3}{2\sqrt{2}}$

Найдите все значения параметра p, при которых разность между корнями уравнения $x^2+px+3p^4=0$ максимальна.

Ответ: $p=\pm\frac{1}{2\sqrt{6}}$

Найдите все значения параметра a, при которых разность между корнями уравнения $x^2+5ax+a^4=0$ максимальна.

Ответ: $a=\pm\frac{5}{2\sqrt{2}}$

Найдите все значения параметра p, при которых разность между корнями уравнения $x^2+px+5p^4=0$ максимальна.

Ответ: $p=\pm\frac{1}{2\sqrt{10}}$

Задача 3.

Решите уравнение $\sin 4x\cos 10x=\sin x\cos 7x$.

Ответ: $x=\frac{k\pi}{3},\ \frac{2k+1}{22}\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

Решите уравнение $\cos 10x\cos 7x=\cos 4x\cos x$.

Ответ: $x=\frac{k\pi}{6},\ \frac{k\pi}{11},\ k\in\mathbb{Z}$

Решите уравнение $\sin 7x\cos 11x=\sin x\cos 5x$.

Ответ: $x=\frac{k\pi}{6},\ \frac{2k+1}{24}\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

Решите уравнение $\cos 12x\cos 5x=\cos 8x\cos x$.

Ответ: $x=\frac{k\pi}{4},\ \frac{k\pi}{13},\ k\in\mathbb{Z}$

Задача 4.

Решите неравенство $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^{\log_{\sqrt{3}-\sqrt{2}} x} \geqslant \left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^{\log_x\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}$.

Ответ: $x \in \left(0, \sqrt{3}-\sqrt{2}\right] \cup \left(1, \sqrt{3}+\sqrt{2}\right]$

Решите неравенство $\left(2+\sqrt{3}\right)^{\log_{2-\sqrt{3}} x} \geqslant \left(2-\sqrt{3}\right)^{\log_x\left(2+\sqrt{3}\right)}$.

Ответ: $x \in \left(0, 2-\sqrt{3}\right] \cup \left(1, 2+\sqrt{3}\right]$

Решите неравенство $\left(\sqrt{5}+2\right)^{\log_{\sqrt{5}-2} x} \geqslant \left(\sqrt{5}-2\right)^{\log_x\left(\sqrt{5}+2\right)}$.

Ответ: $x \in \left(0, \sqrt{5}-2\right] \cup \left(1, \sqrt{5}+2\right]$

Решите неравенство $\left(\sqrt{6}+\sqrt{5}\right)^{\log_{\sqrt{6}-\sqrt{5}} x} \geqslant \left(\sqrt{6}-\sqrt{5}\right)^{\log_x\left(\sqrt{6}+\sqrt{5}\right)}$.

Ответ: $x \in \left(0, \sqrt{6}-\sqrt{5}\right] \cup \left(1, \sqrt{6}+\sqrt{5}\right]$

Задача 5.

Дана трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC. Пусть M — середина отрезка AD, а N — произвольная точка отрезка BC. Пусть K — пересечение отрезков CM и DN, а L — пересечение отрезков MN и AC. Найдите все возможные значения площади треугольника DMK, если известно, что $AD : BC = 3 : 2$, а площадь треугольника ABL равна 4.

Ответ: 3

Дана трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC. Пусть M — середина отрезка AD, а N — произвольная точка отрезка BC. Пусть K — пересечение отрезков CM и DN, а L — пересечение отрезков MN и AC. Найдите все возможные значения площади треугольника ABL, если известно, что $AD : BC = 5 : 2$, а площадь треугольника DMK равна 5.

Ответ: 4

Дана трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC. Пусть M — середина отрезка AD, а N — произвольная точка отрезка BC. Пусть K — пересечение отрезков CM и DN, а L — пересечение отрезков MN и AC. Найдите все возможные значения площади треугольника DMK, если известно, что $AD : BC = 4 : 3$, а площадь треугольника ABL равна 3.

Ответ: 2

Дана трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC. Пусть M — середина отрезка AD, а N — произвольная точка отрезка BC. Пусть K — пересечение отрезков CM и DN, а L — пересечение отрезков MN и AC. Найдите все возможные значения площади треугольника ABL, если известно, что $AD : BC = 4 : 5$, а площадь треугольника DMK равна 2.

Ответ: 5

Задача 6.

Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} ax^2 + 4ax - 8y + 6a + 28 \leqslant 0 \\ ay^2 - 6ay - 8x + 11a - 12 \leqslant 0 \end{cases}$$

имеет ровно одно решение.

Ответ: $a = 2$

Найдите все значения параметра p, при которых система

$$\begin{cases} px^2 + 6px - 12y + 11p + 18 \leqslant 0 \\ py^2 - 2py - 12x + 3p - 30 \leqslant 0 \end{cases}$$

имеет ровно одно решение.

Ответ: $p = 3$

Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} ax^2 + 2ax + 8y + 3a - 36 \geqslant 0 \\ ay^2 - 8ay + 8x + 18a + 4 \geqslant 0 \end{cases}$$

имеет ровно одно решение.

Ответ: $a = -2$

Найдите все значения параметра p, при которых система

$$\begin{cases} px^2 + 8px + 12y + 18p - 30 \geqslant 0 \\ py^2 - 4py + 12x + 6p + 42 \geqslant 0 \end{cases}$$

имеет ровно одно решение.

Ответ: $p = -3$

Задача 7.

Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA'B'C'D'$ с боковыми рёбрами AA', BB', CC', DD'. На рёбрах AB, BC, CD, DA нижнего основания отмечены соответственно точки K, L, M, N, таким образом, что $AK : KB = 4 : 5$, $BL : LC = 3 : 1$, $CM : MD = 7 : 2$, $DN : NA = 3 : 1$. Пусть P, Q, R — центры сфер, описанных около тетраэдров $AKNA'$, $BLKB'$, $CMLC'$, соответственно. Найдите PQ, если известно, что $QR = 1$ и $AB : BC = 3 : 2$.

Ответ: $3/2$

Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA'B'C'D'$ с боковыми рёбрами AA', BB', CC', DD'. На рёбрах AB, BC, CD, DA нижнего основания отмечены соответственно точки K, L, M, N, таким образом, что $AK : KB = 7 : 9$, $BL : LC = 2 : 1$, $CM : MD = 3 : 1$, $DN : NA = 2 : 1$. Пусть P, Q, R — центры сфер, описанных около тетраэдров $AKNA'$, $BLKB'$, $CMLC'$, соответственно. Найдите PQ, если известно, что $QR = 1$ и $AB : BC = 4 : 3$.

Ответ: $4/3$

Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA'B'C'D'$ с боковыми рёбрами AA', BB', CC', DD'. На рёбрах AB, BC, CD, DA нижнего основания отмечены соответственно точки K, L, M, N, таким образом, что $AK : KB = 5 : 4$, $BL : LC = CM : MD = 2 : 1$, $DN : NA = 5 : 1$. Пусть P, Q, R — центры сфер, описанных около тетраэдров $AKNA'$, $BLKB'$, $CMLC'$, соответственно. Найдите QR, если известно, что $PQ = 1$ и $AB : BC = 3 : 2$.

Ответ: $2/3$

Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA'B'C'D'$ с боковыми рёбрами AA', BB', CC', DD'. На рёбрах AB, BC, CD, DA нижнего основания отмечены соответственно точки K, L, M, N, таким образом, что $AK : KB = 9 : 7$, $BL : LC = 7 : 5$, $CM : MD = 5 : 3$, $DN : NA = 3 : 1$. Пусть P, Q, R — центры сфер, описанных около тетраэдров $AKNA'$, $BLKB'$, $CMLC'$, соответственно. Найдите QR, если известно, что $PQ = 1$ и $AB : BC = 4 : 3$.

Ответ: $3/4$

Задача 8.

Найдите все пары чисел x, y из промежутка $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, при которых достигается минимум выражения

$$\left(\frac{\sqrt{3}\sin y}{\sqrt{2}\sin(x+y)}+1\right)\left(\frac{\sqrt{2}\sin x}{3\sin y}+1\right)^2\left(\frac{\sin(x+y)}{7\sqrt{3}\sin x}+1\right)^4$$

Ответ: $x = \arccos\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, $y = \arccos\frac{1}{\sqrt{3}}$

Найдите все пары чисел x, y из промежутка $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, при которых достигается минимум выражения

$$\left(\frac{\sqrt{5}\cos y}{2\sin(x+y)}+1\right)\left(\frac{2\cos x}{3\cos y}+1\right)^2\left(\frac{\sin(x+y)}{7\sqrt{5}\cos x}+1\right)^4$$

Ответ: $x = \arcsin\frac{2}{\sqrt{5}}$, $y = \arcsin\frac{1}{\sqrt{5}}$

Найдите все пары чисел x, y из промежутка $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, при которых достигается минимум выражения

$$\left(\frac{\sqrt{6}\sin y}{\sqrt{5}\sin(x+y)}+1\right)\left(\frac{\sqrt{5}\sin x}{3\sin y}+1\right)^2\left(\frac{\sin(x+y)}{7\sqrt{6}\sin x}+1\right)^4$$

Ответ: $x = \arccos\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}$, $y = \arccos\frac{1}{\sqrt{6}}$

Найдите все пары чисел x, y из промежутка $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, при которых достигается минимум выражения

$$\left(\frac{\sqrt{7}\cos y}{\sqrt{6}\sin(x+y)}+1\right)\left(\frac{\sqrt{6}\cos x}{3\cos y}+1\right)^2\left(\frac{\sin(x+y)}{7\sqrt{7}\cos x}+1\right)^4$$

Ответ: $x = \arcsin\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{7}}$, $y = \arcsin\frac{1}{\sqrt{7}}$

ОБРАЗЦЫ РЕШЕНИЙ

1. Какое из чисел $\dfrac{49}{18}$ и $\dfrac{79}{24}$ ближе к 3?

Решение: $3 - \frac{49}{18} = \frac{5}{18} = \frac{20}{72} < \frac{21}{72} = \frac{7}{24} = \frac{79}{24} - 3.$

Ответ: Первое

2. Найдите все значения параметра a, при которых разность между корнями уравнения $x^2 + 3ax + a^4 = 0$ максимальна.

Решение: Модуль разности между корнями равен $\sqrt{9a^2 - 4a^4} = \sqrt{4a^2\left(\frac{9}{4} - a^2\right)}$. Подкоренное выражение максимально при $a^2 = \frac{9}{8}$, т.е. при $a = \pm\frac{3}{2\sqrt{2}}$.

Ответ: $a = \pm\frac{3}{2\sqrt{2}}$

3. Решите уравнение $\sin 4x \cos 10x = \sin x \cos 7x$.

Решение:

$$\sin 4x \cos 10x = \sin x \cos 7x \iff \sin 14x - \sin 6x = \sin 8x - \sin 6x \iff$$

$$\iff \sin 14x = \sin 8x \iff \left[\begin{array}{l} 14x = 8x + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\ 14x = -8x + (2k+1)\pi,\ k \in \mathbb{Z} \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x = \frac{k\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{2k+1}{22}\pi,\ k \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$$

Ответ: $x = \frac{k\pi}{3},\ \frac{2k+1}{22}\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

4. Решите неравенство $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^{\log_{\sqrt{3}-\sqrt{2}} x} \geqslant \left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^{\log_x \left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}$.

Решение: Заметим, что $\sqrt{3}+\sqrt{2} = (\sqrt{3}-\sqrt{2})^{-1}$, причём $\sqrt{3}+\sqrt{2} > 1$, $\sqrt{3}-\sqrt{2} < 1$. Следовательно,

$$\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^{\log_{\sqrt{3}-\sqrt{2}} x} \geqslant \left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^{\log_x \left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)} \iff$$

$$\iff -\log_{\sqrt{3}+\sqrt{2}} x \geqslant -\log_x\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right) \iff \log_{\sqrt{3}+\sqrt{2}} x \leqslant \frac{1}{\log_{\sqrt{3}+\sqrt{2}} x} \iff$$

$$\iff \frac{\log^2_{\sqrt{3}+\sqrt{2}} x - 1}{\log_{\sqrt{3}+\sqrt{2}} x} \leqslant 0 \iff \left[\begin{array}{l} \log_{\sqrt{3}+\sqrt{2}} x \leqslant -1 \\ 0 < \log_{\sqrt{3}+\sqrt{2}} x \leqslant 1 \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} 0 < x \leqslant \sqrt{3}-\sqrt{2} \\ 1 < x \leqslant \sqrt{3}+\sqrt{2} \end{array}\right.$$

Ответ: $x \in \left(0, \sqrt{3}-\sqrt{2}\right] \cup \left(1, \sqrt{3}+\sqrt{2}\right]$

5. Дана трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC. Пусть M — середина отрезка AD, а N — произвольная точка отрезка BC. Пусть K — пересечение отрезков CM и DN, а L — пересечение отрезков MN и AC. Найдите все возможные значения площади треугольника DMK, если известно, что $AD : BC = 3 : 2$, а площадь треугольника ABL равна 4.

Решение: Заметим, что треугольник DMK подобен треугольнику NCK, а треугольник MAL подобен треугольнику NCL. Отсюда ввиду равенства $DM = MA$ получаем, что

$$\frac{CK}{MK} = \frac{NC}{DM} = \frac{NC}{MA} = \frac{CL}{AL},$$

то есть
$$\frac{MC}{MK} = 1 + \frac{CK}{MK} = 1 + \frac{CL}{AL} = \frac{AC}{AL}.$$
Следовательно,
$$S_{\triangle DMK} = \frac{MK}{MC}S_{\triangle DMC} = \frac{MK}{MC}\cdot\frac{DM}{BC}S_{\triangle ABC} = \frac{MK}{MC}\cdot\frac{DM}{BC}\cdot\frac{AC}{AL}S_{\triangle ABL} = \\ = \frac{DM}{BC}S_{\triangle ABL} = \frac{AD}{2BC}S_{\triangle ABL} = \frac{3}{2\cdot 2}\cdot 4 = 3.$$

Ответ: 3

6. Найдите все значения параметра a, при которых система
$$\begin{cases} ax^2 + 4ax - 8y + 6a + 28 \leqslant 0 \\ ay^2 - 6ay - 8x + 11a - 12 \leqslant 0 \end{cases}$$
имеет ровно одно решение.

Решение: Перепишем систему как
$$\begin{cases} a(x+2)^2 - 8(y-3) + 2a + 4 \leqslant 0 \\ a(y-3)^2 - 8(x+2) + 2a + 4 \leqslant 0 \end{cases}.$$
Такая система имеет ровно одно решение тогда и только тогда, когда ровно одно решение имеет система
$$\begin{cases} au^2 - 8v + 2a + 4 \leqslant 0 \\ av^2 - 8u + 2a + 4 \leqslant 0 \end{cases}.$$
Если $a \leqslant 0$, то любые u, v, такие что $u \geqslant 1/2$, $v \geqslant 1/2$, удовлетворяют системе. Стало быть, для единственности решения необходимо условие
$$a > 0.$$
Далее, если пара (u, v) является решением, то и пара (v, u) также является решением. Следовательно, необходимо, чтобы существовало такое u, что пара (u, u) является решением, причём такое u должно быть единственным. Неравенство
$$au^2 - 8u + 2a + 4 \leqslant 0$$
при положительном a имеет ровно одно решение тогда и только тогда, когда дискриминант $64 - 4a(2a+4)$ равен нулю. Получаем
$$a^2 + 2a - 8 = 0,$$
откуда $a = 2, -4$. Ввиду положительности a остаётся $a = 2$. Подставив $a = 2$ в систему относительно u, v, получаем
$$\begin{cases} u^2 - 4v + 4 \leqslant 0 \\ v^2 - 4u + 4 \leqslant 0 \end{cases}.$$
Сумма этих двух неравенств даёт $(u-2)^2 + (v-2)^2 \leqslant 0$, откуда $u = v = 2$ — единственное решение. Стало быть, $a = 2$, действительно, удовлетворяет условию.

Ответ: $a = 2$

7. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA'B'C'D'$ с боковыми рёбрами AA', BB', CC', DD'. На рёбрах AB, BC, CD, DA нижнего основания отмечены соответственно точки K, L, M, N, таким образом, что $AK : KB = 4 : 5$, $BL : LC = 3 : 1$, $CM : MD = 7 : 2$, $DN : NA = 3 : 1$. Пусть P, Q, R — центры сфер, описанных около тетраэдров $AKNA'$, $BLKB'$, $CMLC'$, соответственно. Найдите PQ, если известно, что $QR = 1$ и $AB : BC = 3 : 2$.

Решение: Точка P равноудалена от точек A, A', следовательно, она лежит в плоскости, проходящей через середины боковых рёбер параллелепипеда. По аналогичным соображениям точки Q, R также лежат в этой плоскости. Далее, ортогональные проекции P', Q', R' точек P, Q, R на плоскость ABC суть центры окружностей, описанных около треугольников AKN, BLK, CML соответственно. Эти треугольники прямоугольные, стало быть, P', Q', R' совпадают с серединами отрезков KN, LK, ML соответственно. Получаем

$$PQ = P'Q' = \frac{1}{2}NL, \quad QR = Q'R' = \frac{1}{2}MK.$$

Далее, обозначим через M' ортогональную проекцию точки M на AB, а через N' — ортогональную проекцию точки N на BC. Тогда

$$AM' = DM = \frac{2}{9}CD = \frac{2}{9}AB, \quad BN' = AN = \frac{1}{4}AD = \frac{1}{4}BC,$$

откуда

$$M'K = AK - AM' = \left(\frac{4}{9} - \frac{2}{9}\right)AB = \frac{2}{9}AB, \quad N'L = BL - BN' = \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{4}\right)BC = \frac{1}{2}BC.$$

Получаем

$$\frac{MM'}{M'K} = \frac{BC}{\frac{2}{9}AB} = 3, \quad \frac{NN'}{N'L} = \frac{AB}{\frac{1}{2}BC} = 3.$$

Таким образом, прямоугольные треугольники $MM'K$ и $NN'L$ подобны, откуда

$$\frac{PQ}{QR} = \frac{NL}{MK} = \frac{NN'}{MM'} = \frac{AB}{BC} = \frac{3}{2}.$$

Стало быть, $PQ = 3/2$.

Ответ: 3/2

8. Найдите все пары чисел x, y из промежутка $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, при которых достигается минимум выражения

$$\left(\frac{\sqrt{3}\sin y}{\sqrt{2}\sin(x+y)} + 1\right)\left(\frac{\sqrt{2}\sin x}{3\sin y} + 1\right)^2\left(\frac{\sin(x+y)}{7\sqrt{3}\sin x} + 1\right)^4$$

Решение: Положим

$$A = \frac{\sqrt{3}\sin y}{\sqrt{2}\sin(x+y)}, \quad B = \frac{\sqrt{2}\sin x}{3\sin y}, \quad C = \frac{\sin(x+y)}{7\sqrt{3}\sin x}$$

и заметим, что, во-первых, эти величины при $x, y \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ положительны, а во-вторых,

$$ABC = \frac{1}{21}.$$

Далее, воспользуемся последовательно неравенством между средним арифметическим и средним геометрическим двух чисел:

$$A + 1 \geqslant 2\sqrt{A}, \qquad B + 1 = B + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \geqslant 2\sqrt{\frac{B}{3}} + \frac{2}{3} \geqslant 4\sqrt[4]{\frac{B}{27}},$$

$$C+1=C+\frac{1}{7}+\dots+\frac{1}{7}\geqslant 2\sqrt{\frac{C}{7}}+\frac{2}{7}+\frac{2}{7}+\frac{2}{7}\geqslant 4\sqrt[4]{\frac{C}{7^3}}+\frac{4}{7}\geqslant 8\sqrt[8]{\frac{C}{7^7}}$$

(заметим, что для $B+1$ и для $C+1$ можно было сразу применить неравенства между средними для четырёх и восьми чисел). Отсюда

$$(A+1)(B+1)^2(C+1)^4\geqslant\frac{2\cdot4^2\cdot8^4}{3^{3/2}7^{7/2}}\sqrt{ABC}=\frac{2^{17}}{3^2 7^4},$$

причём равенство достигается тогда и только тогда, когда

$$A=1,\quad B=\frac{1}{3},\quad C=\frac{1}{7},$$

что равносильно системе

$$\begin{cases}\sin y=\sqrt{2}\sin x\\ \sin(x+y)=\sqrt{3}\sin x\end{cases}.$$

Учитывая ограничение $x,y\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, получаем:

$$\begin{cases}\sin y=\sqrt{2}\sin x\\ \sin(x+y)=\sqrt{3}\sin x\end{cases}\iff\begin{cases}\sin y=\sqrt{2}\sin x\\ \sin x(\cos y+\sqrt{2}\cos x)=\sqrt{3}\sin x\end{cases}\iff$$

$$\iff\begin{cases}\sin^2 y=2\sin^2 x\\ \cos y+\sqrt{2}\cos x=\sqrt{3}\end{cases}\iff\begin{cases}\cos^2 y-2\cos^2 x=-1\\ \cos y+\sqrt{2}\cos x=\sqrt{3}\end{cases}\iff$$

$$\iff\begin{cases}\cos y-\sqrt{2}\cos x=-\frac{1}{\sqrt{3}}\\ \cos y+\sqrt{2}\cos x=\sqrt{3}\end{cases}\iff\begin{cases}\cos x=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\\ \cos y=\frac{1}{\sqrt{3}}\end{cases}\iff\begin{cases}x=\arccos\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\\ y=\arccos\frac{1}{\sqrt{3}}\end{cases}.$$

Ответ: $x=\arccos\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, $y=\arccos\frac{1}{\sqrt{3}}$